

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ МИГРАЦИИ ДАННЫХ ВСП

А. В. БАЕВ*, А. А. ТАБАКОВ**,
И. Е. СОЛТАН**, И. В. ЯКОВЛЕВ***

(* — МГУ, ** — ОАО «ЦГЭ», Москва,
*** — ООО «ГЕОВЕРС», Москва)

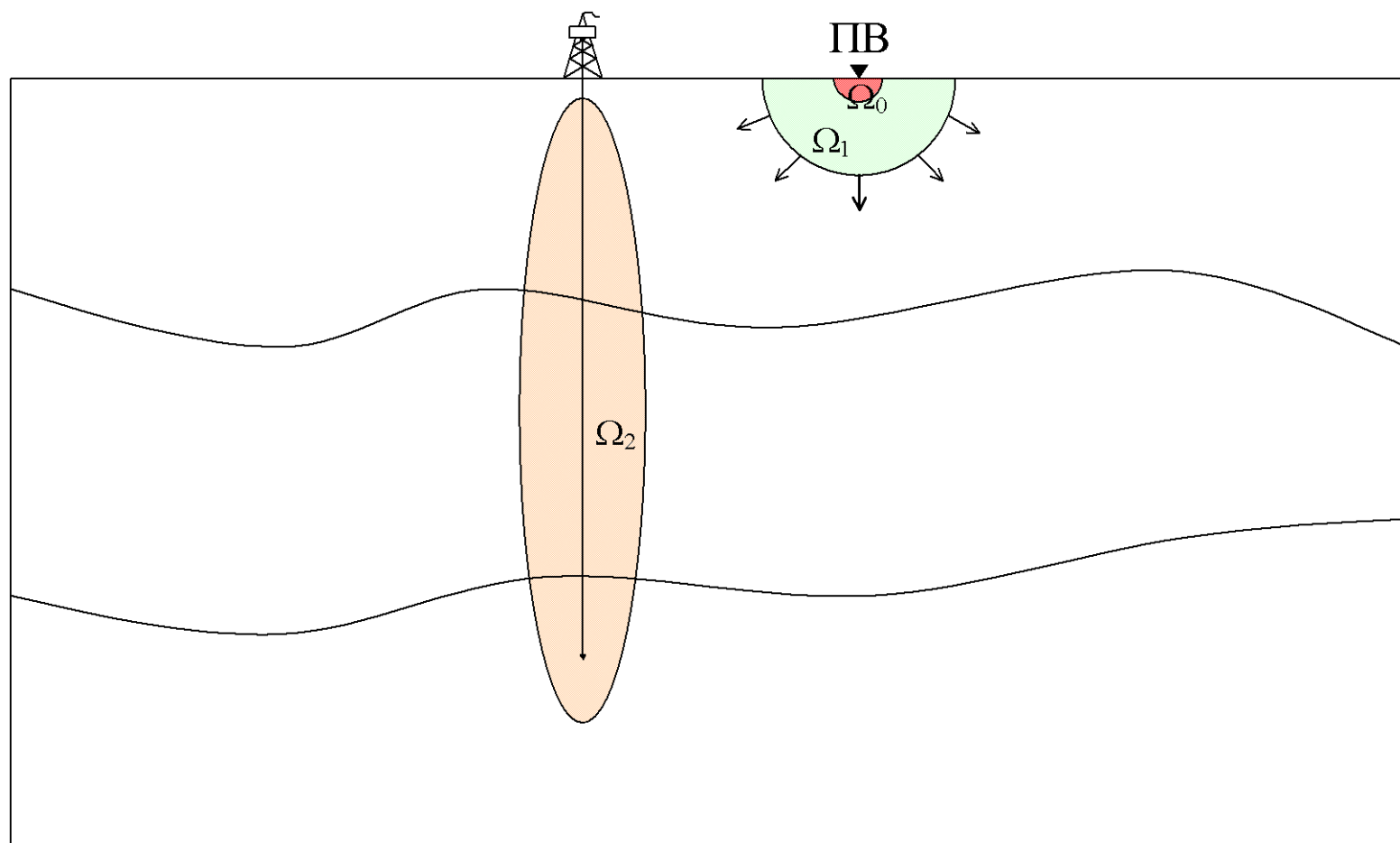


Схема наблюдений

1. РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

1.1. Математическая модель распространения волн

$$\mathbf{u}_{tt} - \mathcal{L}_r \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{tt} - \rho^{-1}(\mathbf{grad} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2 \operatorname{div} \mu \widehat{\varepsilon}_u) = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{r} \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad \rho(\mathbf{r}), \lambda(\mathbf{r}), \mu(\mathbf{r}) \in W_2^1(\Omega), \quad \rho, \lambda, \mu > 0$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_t|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \gamma_{\text{dis}}^+[\mathbf{u}]|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T]$$

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — вектор смещений, $\widehat{\varepsilon}_u(\mathbf{r}, t)$ — тензор деформаций

$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ — источник колебаний, $\operatorname{supp} \mathbf{F} = \Omega_0 \times [0, t_0]$

$\Omega_0 \subset \Omega$, $\operatorname{diam} \Omega_0 \ll \operatorname{diam} \Omega$, $t_0 \ll T$

$\rho(\mathbf{r})$ — плотность среды, $\lambda(\mathbf{r}), \mu(\mathbf{r})$ — параметры Ламэ

$\gamma_{\text{dis}}^+[\cdot]|_{\partial\Omega}$ — оператор диссипативных граничных условий

1.2. Механизм рассеяния в неоднородной среде

$$\mathbf{u}_{tt} - \mathcal{L}_\tau \mathbf{u} \equiv \underbrace{\mathbf{u}_{tt} - 0.5(\nabla_\tau(\nabla_\tau \cdot \mathbf{u}) + \nabla_\tau \otimes \hat{\varepsilon}_u)}_{\text{главная часть оператора при } v_P=2v_S} + \hat{R} \mathbf{k} = \mathbf{F}$$

$\mathbf{k}(\mathbf{r}) \equiv -(2\kappa)^{-1} \nabla_\tau \kappa$ — векторный коэффициент отражения

$\kappa(\mathbf{r}) = \rho v_P$ — жесткость среды

$$\nabla_\tau \kappa \equiv v_P \nabla \kappa = v_P \mathbf{grad} \kappa, \quad (\nabla_\tau \cdot \mathbf{u}) = v_P \operatorname{div} \mathbf{u}$$

$$\nabla_\tau \otimes \hat{\varepsilon}_u = v_P \mathbf{div} \hat{\varepsilon}_u, \quad \mathbf{div} \hat{\varepsilon}_u \text{ — дивергенция тензора } \hat{\varepsilon}_u = v_P \hat{\varepsilon}_u$$

$$v_P(\mathbf{r}) = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \text{ — скорость } P\text{-волн}$$

$$v_S(\mathbf{r}) = \sqrt{\mu/\rho} \text{ — скорость } S\text{-волн } (v_P/v_S = \text{const})$$

$$\hat{R}(\mathbf{r}, t) = 2\kappa^{-1} \hat{\sigma}_u \text{ — тензор рассеяния}$$

$$\hat{R} = (\nabla_\tau \cdot \mathbf{u}) \hat{E} + \hat{\varepsilon}_u \text{ при } v_P = 2v_S, \quad \hat{E} \text{ — единичный тензор}$$

$$\hat{\sigma}_u(\mathbf{r}, t) \text{ — тензор напряжений}$$

2. ПРОДОЛЖЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

2.1. Постановка задачи

Дано:

- i) $\mathbf{u}_{VSP}(\mathbf{r}, t)$ — трехкомпонентные трассы ВСП полного поля смещений при $t \in [0, T]$ в области регистрации $\Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_2 \cap \Omega_0 = \emptyset$
- ii) опорная модель среды: скоростной разрез $v_p(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ в Ω

Найти:

- i) продолженное поле смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в области Ω
- ii) векторный коэффициент отражения $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ в области $\Omega \setminus \Omega_0$

Построить:

изображение среды в области Ω как совокупность разрезов поверхностей $\varkappa(\mathbf{r}) = \text{const}$ с полем нормалей $\mathbf{k}(\mathbf{r})$

2.2. Вариационная формулировка

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{VSP}\|_{\mathbb{R}^3}^2 \chi(\Omega_2) d\mathbf{r}_\rho dt \rightarrow \min_{w \in H}$$

$$w \equiv \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1\} \in H \Leftrightarrow \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \in W_2^2(\Omega), \mathbf{u}_1(\mathbf{r}) \in W_2^1(\Omega)$$

$\chi(\Omega_2)$ — характеристическая функция Ω_2 , $d\mathbf{r}_\rho \equiv \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — продолженное волновое поле — решение задачи

$$(\partial_t^2 - \mathcal{L}_r)\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad t \in [t_1, T]$$

$$\mathbf{u}|_{t=t_1} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_t|_{t=t_1} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega$$

$$\gamma_{\text{dis}}^+[\mathbf{u}]|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [t_1, T], \quad t_0 < t_1 < \text{dist}_\tau(\Omega_0, \Omega_2)$$

2.3. Метод градиентного спуска

$$w_{n+1} = w_n - \alpha_{n+1} J'(w_n), \quad \alpha_{n+1} > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Выбор параметра спуска α :

i) скорейший спуск — одномерная минимизация по α :

$$\alpha_{n+1} = \arg \min_{\alpha > 0} J(w_n - \alpha J'(w_n))$$

ii) априорный выбор при $\min_{w \in H} J(w) = 0$:

$$\alpha_{n+1} = J(w_n) / \|J'(w_n)\|_H^2$$

3. МИГРАЦИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

3.1. Метод функции Лагранжа

$$L(\mathbf{u}, w, \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{VSP}\|_{\mathbb{R}^3}^2 d\mathbf{r}_\rho dt + \int_{t_1}^T \int_{\Omega} \mathbf{U}(\partial_t^2 - \mathcal{L}_r) \mathbf{u} d\mathbf{r}_\rho dt$$

$$\delta L(\mathbf{u}, w, \mathbf{U}) = \int_0^T \int_{\Omega_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{VSP}) \delta \mathbf{u} d\mathbf{r}_\rho dt + \int_{t_1}^T \int_{\Omega} \mathbf{U}(\partial_t^2 - \mathcal{L}_r) \delta \mathbf{u} d\mathbf{r}_\rho dt$$

$$= \int_{t_1}^T \int_{\Omega} \chi(\Omega_2) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{VSP}) \delta \mathbf{u} d\mathbf{r}_\rho dt + \int_{\Omega} \mathbf{U}|_{t_1}^T \delta \mathbf{u}_1 d\mathbf{r}_\rho - \int_{\Omega} \mathbf{U}_t|_{t_1}^T \delta \mathbf{u}_0 d\mathbf{r}_\rho$$

$$+ \int_{t_1}^T \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \widehat{\sigma}_U \mathbf{n}_{\partial\Omega} ds dt - \int_{t_1}^T \int_{\partial\Omega} \mathbf{U} \delta \widehat{\sigma}_u \mathbf{n}_{\partial\Omega} ds dt + \int_{t_1}^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} (\partial_t^2 - \mathcal{L}_r) \mathbf{U} d\mathbf{r}_\rho dt$$

3.2. Сопряженная задача. Построение градиента

$$\delta L(\mathbf{u}, w, \mathbf{U}) = 0 \quad \text{для любых} \quad \delta \mathbf{u} \in W_2^2, \delta w \in H \quad \Rightarrow$$

$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — мигрированное поле — решение сопряженной задачи

$$\mathbf{U}_{tt} - \mathcal{L}_r \mathbf{U} = \chi(\Omega_2)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{VSP}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad t \in [t_1, T]$$

$$\mathbf{U}|_{t=T} = \mathbf{U}_t|_{t=T} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \gamma_{\text{dis}}^-[\mathbf{U}]|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [t_1, T]$$

$$\delta J(w) = J'(w)\delta w = \int_{\Omega} \mathbf{U}|_{t=t_1} \delta \mathbf{u}_1 \, d\mathbf{r}_\rho - \int_{\Omega} \mathbf{U}_t|_{t=t_1} \delta \mathbf{u}_0 \, d\mathbf{r}_\rho \quad \Rightarrow$$

$$J'(w) = \{ \mathbf{U}_t(\mathbf{r}, t_1), -\mathbf{U}(\mathbf{r}, t_1) \} \equiv \{ \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1 \} \quad \Rightarrow$$

начальные условия для продолженного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$:

$$w^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}|_{t=t_1} = \mathbf{u}_0 = -\alpha_0 \mathbf{U}_0^0, \quad \mathbf{u}_t|_{t=t_1} = \mathbf{u}_1 = -\alpha_0 \mathbf{U}_1^0$$

4. ИНВЕРСИЯ ПРОДОЛЖЕННОГО ПОЛЯ

Задача рассеяния в вариациях:

$$(\partial_t^2 - \mathcal{L}_r^0) \mathbf{v} = -\hat{R} \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{k} \in K \subset L_2(\Omega)$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_t|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \gamma_{\text{dis}}^+[\mathbf{v}]|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T]$$

где $\mathcal{L}_r^0$ — $\mathcal{L}_r$ при $\varkappa = \varkappa_0 = \rho_0 v_P = \text{const}$, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u} - \mathbf{u}^0$

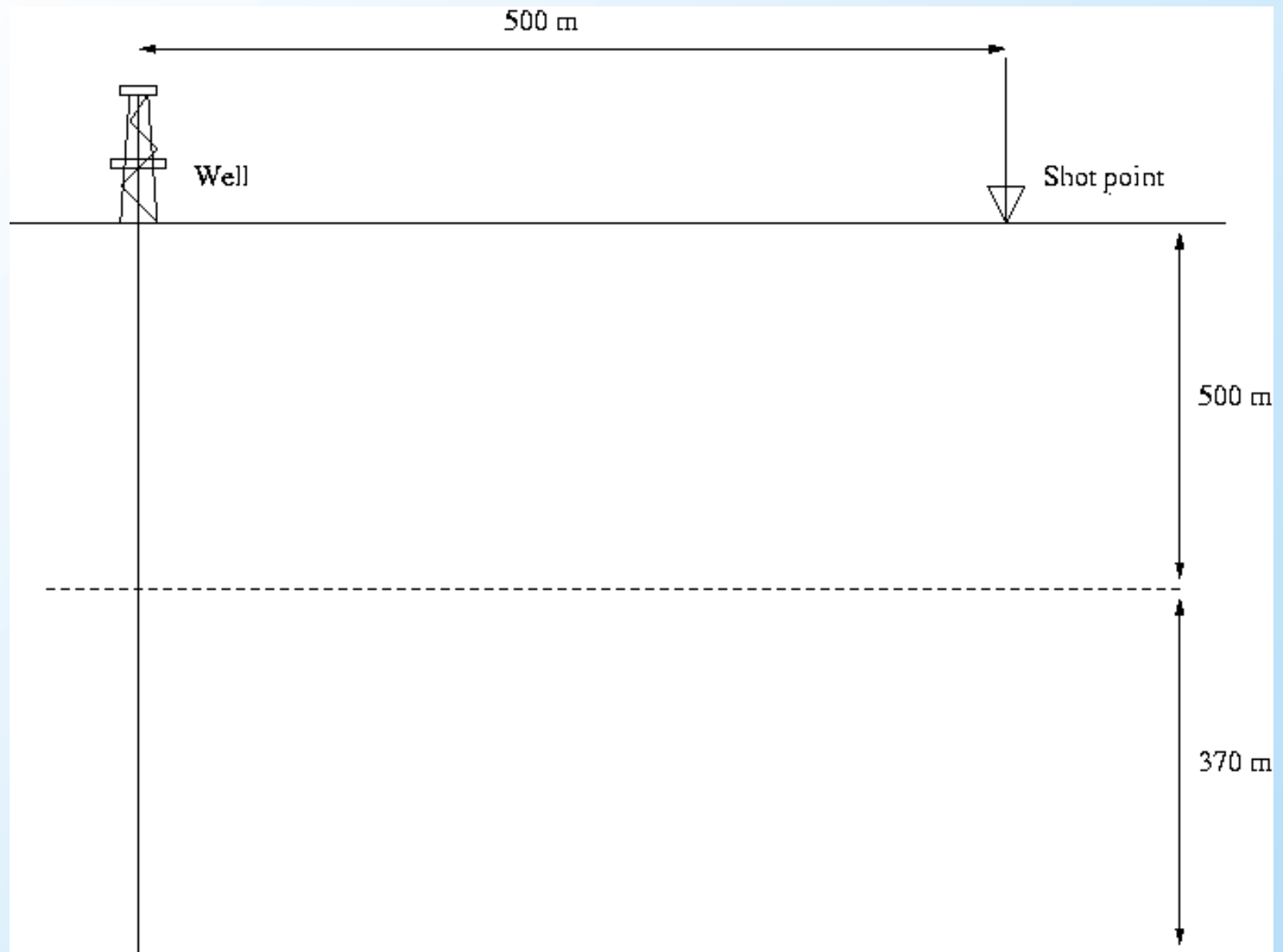
$$(\partial_t^2 - \mathcal{L}_r) \mathbf{u} = (\partial_t^2 - \mathcal{L}_r^0) \mathbf{u}^0 = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad t \in [t_0, T] \quad \Rightarrow$$

$$2\hat{\sigma}_u \mathbf{k} = -\varkappa_0(\partial_t^2 - \mathcal{L}_r^0) \mathbf{u} \equiv \mathbf{c}(\mathbf{r}, t) \quad \text{или для}$$

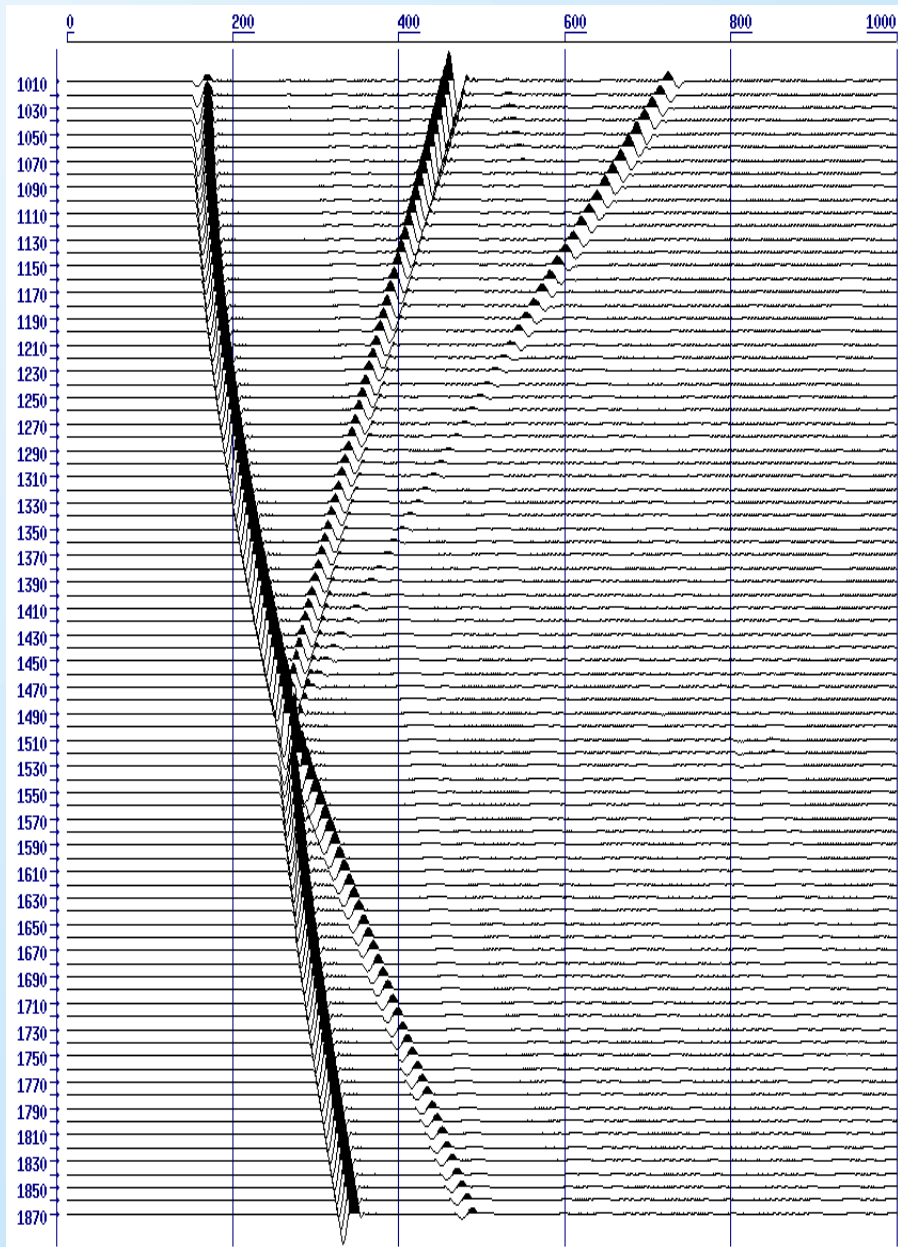
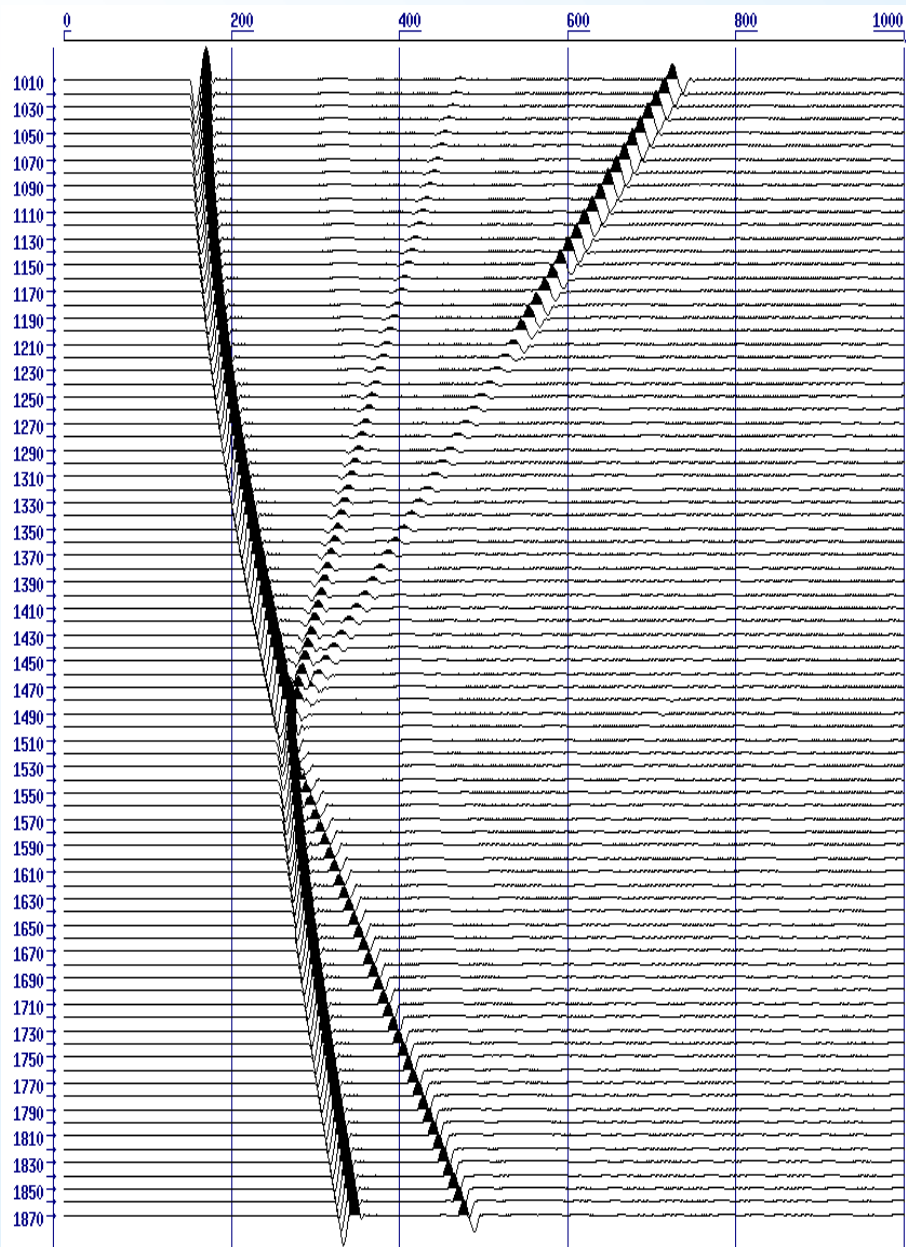
$$\hat{A}(\mathbf{r}) = 2 \int_0^T \hat{\sigma}_u(\mathbf{r}, t) dt, \quad \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \int_0^T \mathbf{c}(\mathbf{r}, t) dt$$

$$\hat{A}(\mathbf{r}) \mathbf{k}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = \arg \min_{\mathbf{k} \in K} \|\hat{A} \mathbf{k} - \mathbf{b}\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \lambda \|\mathbf{k}\|_{\mathbb{R}^3}^2$$

Схема наблюдений ВСП

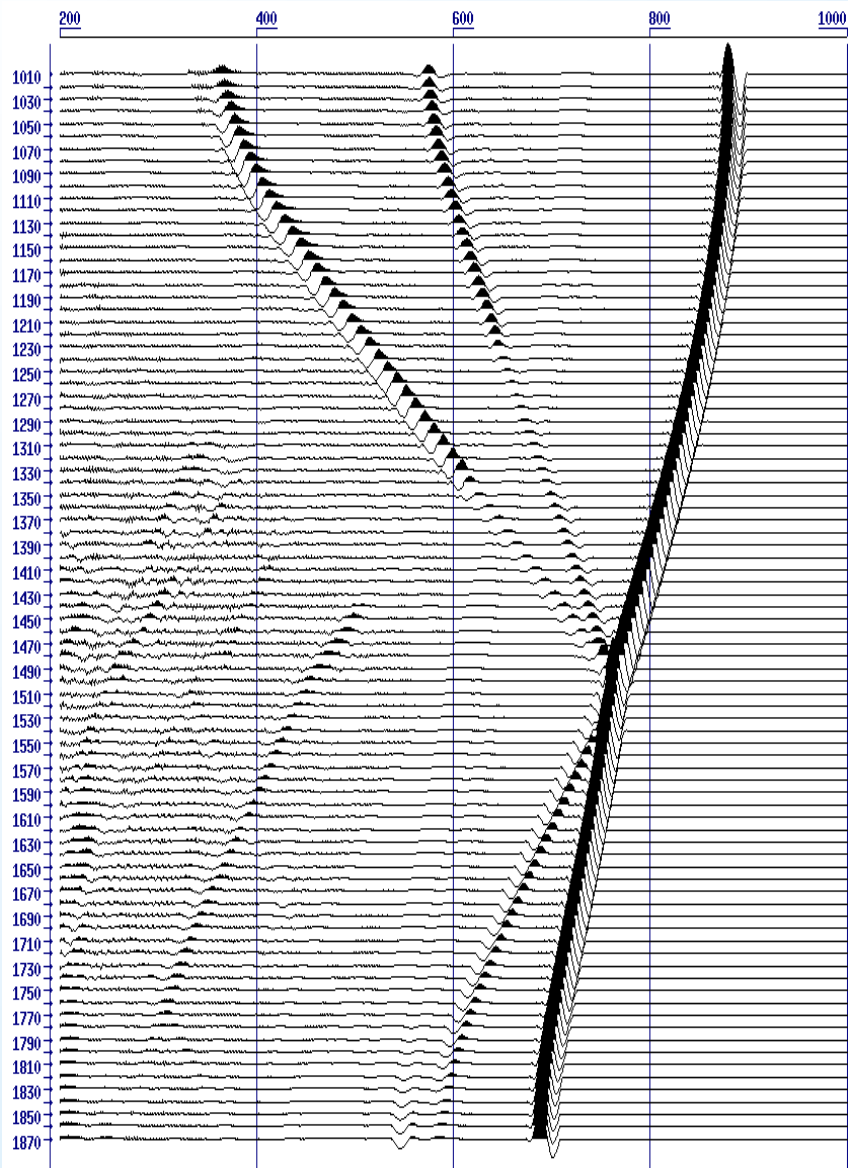


Исходное волновое поле ВСП (x,z - компоненты)

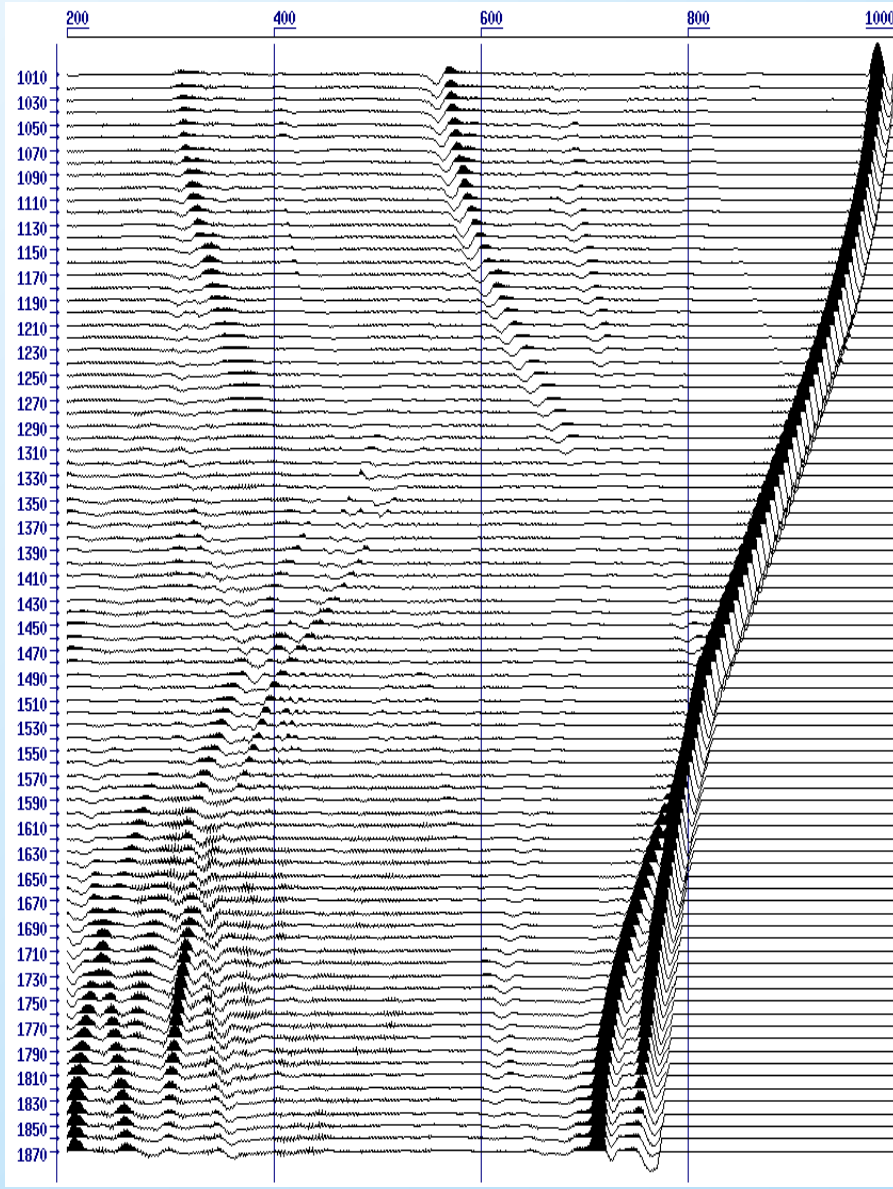
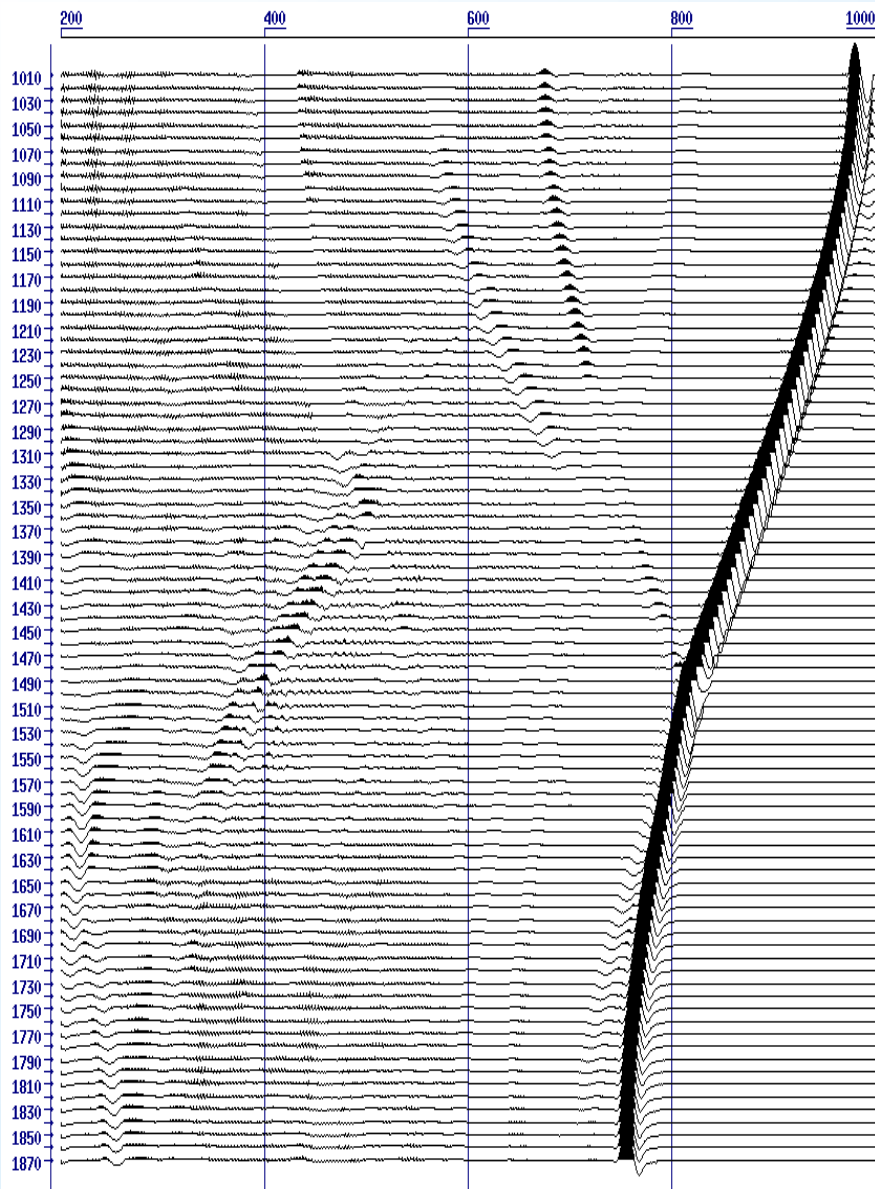


Мигрированное волновое поле ВСП

(удаление 100м от скважины, x,z – компоненты)



Мигрированное волновое поле ВСП (удаление 300м от скважины, x,z – компоненты)



Изображение разреза в векторном коэффициенте отражения (x, z – компоненты коэффициента отражения)

