ДИАГНОСТИКА ДИСПЕРСИИ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Александров П.Н.

ЦГЭМИ ИФЗ РАН, Троицк

alexandr@igemi.troitsk.ru

Постановка проблемы

Теория отстает от аппаратурных возможностей.

Характер неоднородности - 1Д, 2Д, 3Д или 4Д

Линейность

Взаимность

Случайность или детерминированность

Дисперсия и т.п.

Требуется проводить диагностику свойств объекта исследования.

Диагностика – экспериментальное определение класса математических моделей материальных уравнений, в рамках которых необходимо проводить интерпретацию полевых данных.

О ПРИНЦИПЕ ПРИЧИННОСТИ

Частотная дисперсия физических параметров связана с частотной зависимостью их от частоты. Во временной области эти параметры, входящие в материальные уравнения, являются операторами и описывают свойства сред с памятью. При описании диспергирующих свойств сред, необходимо учитывать принцип причинности, из которого следует, что причина не может опережать следствие. В общем случае, линейные среды описываются с помощью интегралов свертки вида

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau) d\tau \qquad (1)$$

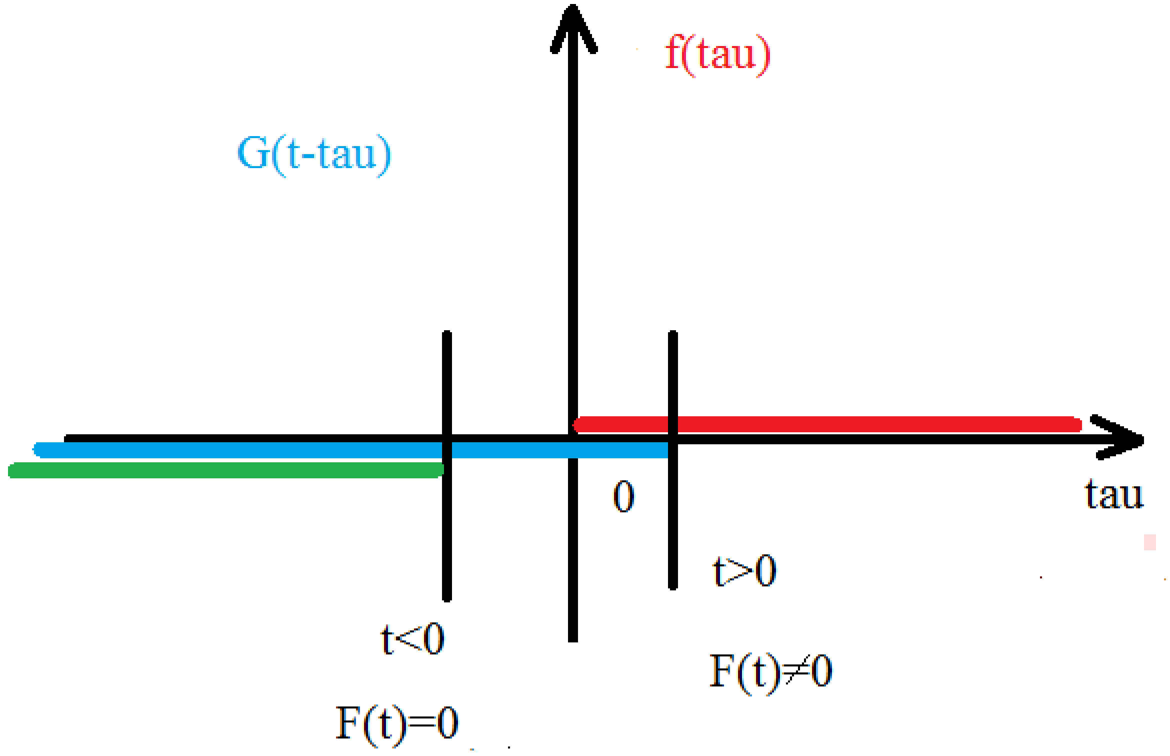
где $f(t)$ - воздействие на систему, описывающейся передаточной функцией $G(t)$, $F(t)$ - результат воздействия, t - время.

Причинно-следственные связи описываются с помощью причинных функций, которые обладают следующими свойствами

$$f(t) = \begin{cases} f(t), t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, \quad F(t) = \begin{cases} F(t), t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Как следствие этого, и передаточная функция также будет являться причинной функций

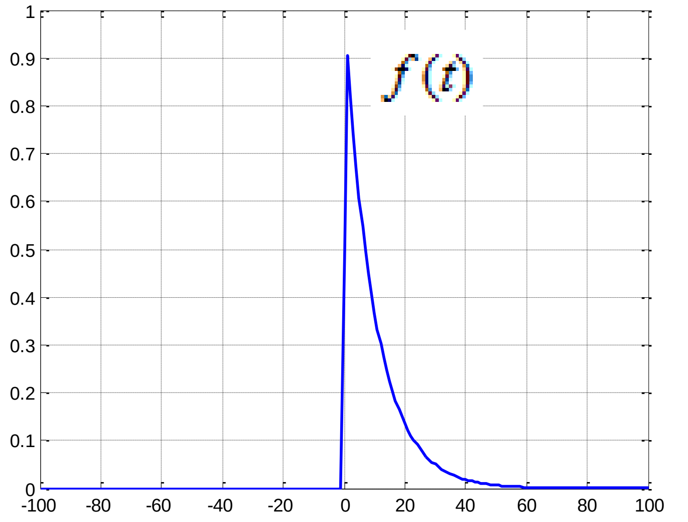
$$G(t) = \begin{cases} G(t), t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

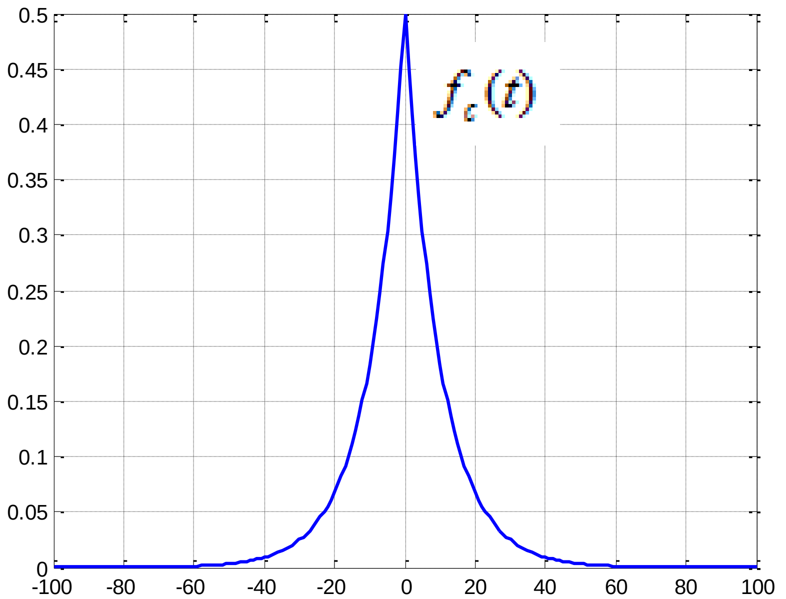


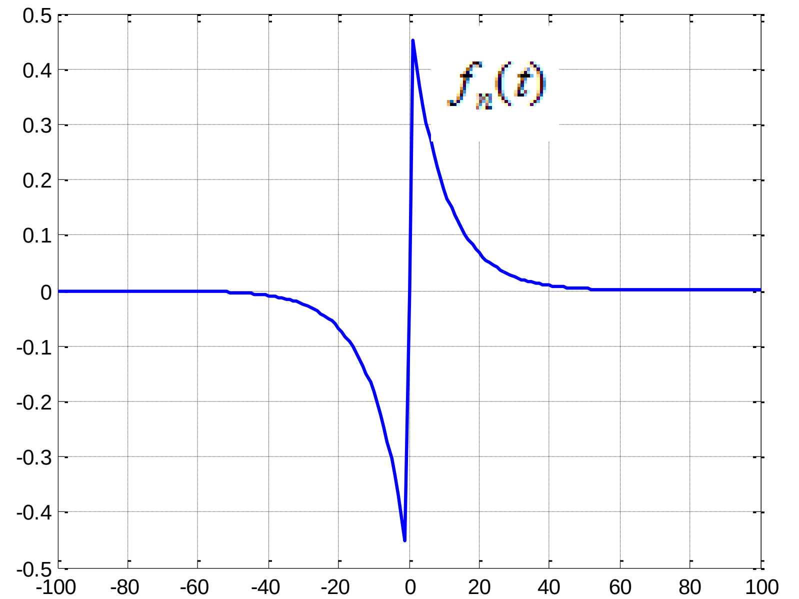
В случае, если носители функций не пересекаются, то произведение в подынтегральном выражение будет равно нулю.

Важным свойством причинных функций является связь действительной и мнимой частей их спектров. Действительно, представим причинную функцию во временной области в виде суммы четной $f_c(t)$ и нечетной $f_n(t)$ функций $f(t) = f_c(t) + f_n(t)$, где

$$f_c(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_n(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$







Введем знаковую функцию $sign(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ -1, t < 0 \end{cases}$

Тогда четная и нечетная функции будут непосредственно связаны уравнениями

$f_c(t) = f_н(t) sign(t)$ и $f_н(t) = -f_c(t) sign(t)$.

Отсюда следуют преобразования Гильберта

$$\mathrm{Re}(f(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(f(\nu))}{\omega - \nu} d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(f(\omega - \nu))}{\nu} d\nu$$

$$\mathrm{Im}(f(\omega)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(f(\nu))}{\omega - \nu} d\nu = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(f(\omega - \nu))}{\nu} d\nu$$

Поскольку спектр знаковой функции $sign(t) \to \dfrac{1}{i\omega} = -i\dfrac{1}{\omega}$

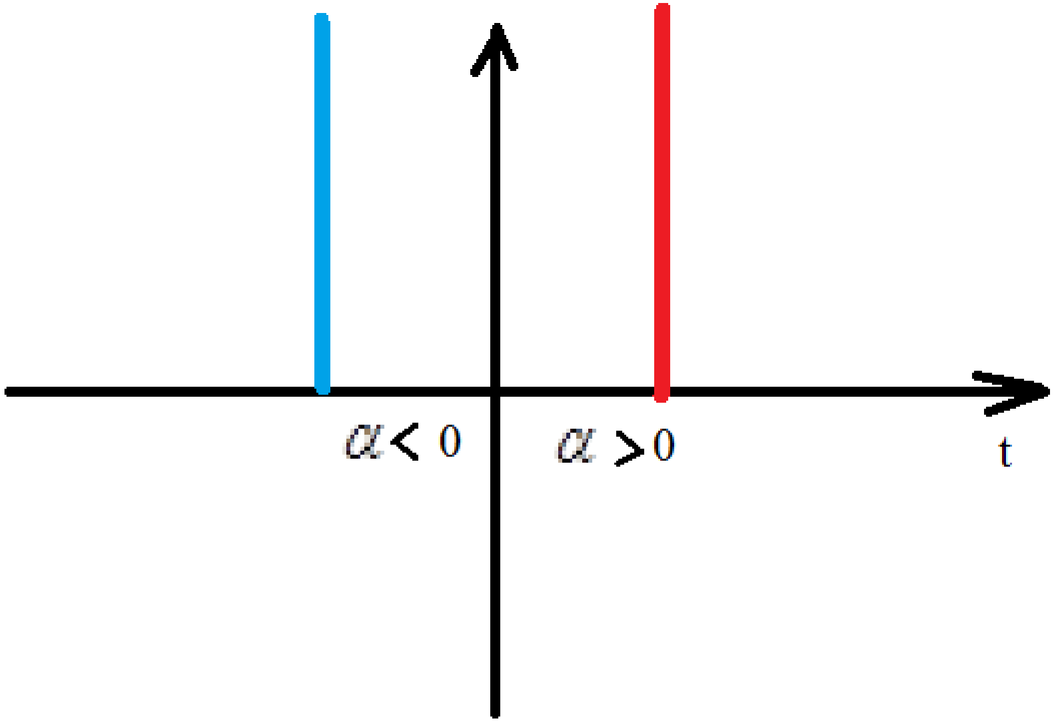
и, согласно свойствам преобразования Фурье, произведение во временной области функций времени есть свертка в частотной области их спектров, и наоборот.

Причинная функция обязана иметь как действительную, так и мнимую части спектра.

Отметим, что дельта-функция Дирака не является причинной функцией поскольку у ее спектра отсутствует мнимая часть. Однако, если сместить вправо эту функцию на величину $\alpha > 0, \alpha \to 0$, то дельта функция вида $\delta(t-\alpha)$ оказывается причинной, поскольку появляется как действительная, так мнимая части спектра $\delta(t-\alpha) \to e^{i\omega\alpha} = Cos(\omega\alpha) + iSin(\omega\alpha)$.

Таким образом, сдвиг в право по оси времени не некоторую конечную величину приводит к причинности дельта-функции.

Однако обратное преобразование Фурье обратной функции $\frac{1}{e^{i\omega\alpha}} = e^{-i\omega\alpha}$ приводит к нарушению принципа причинности для обратного оператора который равен $e^{-i\omega\alpha} \to \delta(t+\alpha)$. Следовательно, если прямой оператор - причинная функция, то обратный оператор может терять причинность.



Красным цветом показана функция прямого оператора, синим цветом – функция обратного оператора.

Обратный оператор теряет свойство причинности.

Пример. Закон Ома.

$$\mathbf{J}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau)\mathbf{E}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\mathbf{E}(t-\tau)d\tau$$

$$\mathbf{J}(t) = \begin{cases} \mathbf{J}(t), t>0 \\ 0, t<0 \end{cases}, \quad \mathbf{E}(t) = \begin{cases} \mathbf{E}(t), t>0 \\ 0, t<0 \end{cases}, \quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma(t), t>0 \\ 0, t<0 \end{cases}$$

$$\mathbf{J}(t) = \int_{0}^{t} \sigma(t-\tau)\mathbf{E}(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \sigma(\tau)\mathbf{E}(t-\tau)d\tau$$

$$\mathbf{E}(t) = \int_{0}^{t} \sigma^{-1}(t-\tau)\mathbf{J}(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \rho(t-\tau)\mathbf{J}(\tau)d\tau$$

$$\rho(\omega)\sigma(\omega) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \rho(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau = \delta(t)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^{N+1} a_n (i\omega)^n}{\sum_{n=0}^{N} b_n (i\omega)^n} = \sigma_0 \frac{\prod_{n=0}^{N+1} (1 + i\omega c_n)^n}{\prod_{n=0}^{N} (1 + i\omega d_n)^n}$$

ДИАГНОСТИКА ДИСПЕРСИИ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Теорема взаимности для упругих полей.

Введем вектор скорости смещения $\mathbf{V} = i\omega\mathbf{S}$. Пусть имеется два источника в разных средах, работающих на разных частотах ω_1 и ω_2 . Тогда можно выписать две системы уравнений теории упругости.

Для первого источника и частоты ω_1

$$div\mathbf{P}_x{}^1 - i\omega_1\rho_1 V_x{}^1 = -F_x{}^1$$

$$div\mathbf{P}_y{}^1 - i\omega_1\rho_1 V_y{}^1 = -F_y{}^1 \qquad (1a)$$

$$div\mathbf{P}_z{}^1 - i\omega_1\rho_1 V_z{}^1 = -F_z{}^1$$

Закон Гука примет вид

$$gradV_x{}^1 = H_x{}^1 i\omega_1\mathbf{P}^1$$

$$gradV_y{}^1 = H_y{}^1 i\omega_1\mathbf{P}^1 \qquad (2a)$$

$$gradV_z{}^1 = H_z{}^1 i\omega_1\mathbf{P}^1$$

Для второго источника и частоты ω_2

$$div\mathbf{P}_x{}^2 - i\omega_2\rho_2 V_x{}^2 = -F_x{}^2$$

$$div\mathbf{P}_y{}^2 - i\omega_2\rho_2 V_y{}^2 = -F_y{}^2 \qquad (1b)$$

$$div\mathbf{P}_z{}^2 - i\omega_2\rho_2 V_z{}^2 = -F_z{}^2$$

Закон Гука

$$gradV_x{}^2 = H_x{}^2 i\omega_2\mathbf{P}^2$$

$$gradV_y{}^2 = H_y{}^2 i\omega_2\mathbf{P}^2 \qquad (2b)$$

$$gradV_z{}^2 = H_z{}^2 i\omega_2\mathbf{P}^2$$

С учетом (1b) и (2a) можно получить

$$div(V_x{}^{1*}\mathbf{P}_x{}^2 + V_y{}^{1*}\mathbf{P}_y{}^2 + V_z{}^{1*}\mathbf{P}_z{}^2) =$$

$$gradV_x{}^{1T}\cdot\mathbf{P}_x{}^2 + gradV_y{}^{1T}\cdot\mathbf{P}_y{}^2 + gradV_z{}^{1T}\cdot\mathbf{P}_z{}^2 + i\omega_2\rho_2(V_x{}^{1*}V_x{}^2 + V_y{}^{1*}V_y{}^2 + V_z{}^{1*}V_z{}^2) -$$

$$(V_x{}^{1*}F_x{}^2 + V_y{}^{1*}F_y{}^2 + V_z{}^{1*}F_z{}^2) =$$

$$[gradV_x{}^1; gradV_y{}^1; gradV_z{}^1]^T\mathbf{P}^2 + i\omega_2\rho_2\mathbf{V}^{1T}\mathbf{V}^2 - \mathbf{V}^{1T}\mathbf{F}^2$$

Аналогичное уравнение получим с учетом уравнений (1a) и (2b)

Разность полученных уравнений есть

$$div((V_x^{1*}\mathbf{P}_x^{\,2}+V_y^{1*}\mathbf{P}_y^{\,2}+V_z^{1*}\mathbf{P}_z^{\,2})-(V_x^{2*}\mathbf{P}_x^{\,1}+V_y^{2*}\mathbf{P}_y^{\,1}+V_z^{2*}\mathbf{P}_z^{\,1}))=$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{V}^1\\ gradV_x^{\,1}\\ gradV_y^{\,1}\\ gradV_z^{\,1}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} i(\omega_2\rho_2-\omega_1\rho_1)[1] & [0]\\ [0] & (U^2-U^{1T})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{V}^2\\ gradV_x^{\,2}\\ gradV_y^{\,2}\\ gradV_z^{\,2}\end{pmatrix}-(\mathbf{V}^{1T}\mathbf{F}^2-\mathbf{V}^{2T}\mathbf{F}^1)$$

где $U=H^{-1}$.

Для диагностики дисперсии упругих параметров, преобразуем полученное выражение к виду

$$div(\frac{(V_x^{1*}\mathbf{P}_x^{\,2}+V_y^{1*}\mathbf{P}_y^{\,2}+V_z^{1*}\mathbf{P}_z^{\,2})-(V_x^{2*}\mathbf{P}_x^{\,1}+V_y^{2*}\mathbf{P}_y^{\,1}+V_z^{2*}\mathbf{P}_z^{\,1})}{\omega_2-\omega_1})=$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{V}^1\\ gradV_x^{\,1}\\ gradV_y^{\,1}\\ gradV_z^{\,1}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{i(\omega_2\rho_2-\omega_1\rho_1)}{\omega_2-\omega_1}[1] & [0]\\ [0]^T & \frac{1}{\omega_2-\omega_1}(U^2-U^{1T})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{V}^2\\ gradV_x^{\,2}\\ gradV_y^{\,2}\\ gradV_z^{\,2}\end{pmatrix}-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}(\mathbf{V}^{1T}\mathbf{F}^2-\mathbf{V}^{2T}\mathbf{F}^1)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$\operatorname{Re}\int_V dv \frac{1}{\omega_2-\omega_1}(\mathbf{V}^{1T}\mathbf{F}^2-\mathbf{V}^{2T}\mathbf{F}^1)=0$$

$$\operatorname{Im}\int_V dv \frac{1}{\omega_2-\omega_1}(\mathbf{V}^{1T}\mathbf{F}^2-\mathbf{V}^{2T}\mathbf{F}^1)=\int_{V_\infty} dv \begin{pmatrix}\mathbf{V}^1\\ gradV_x^1\\ gradV_y^1\\ gradV_z^1\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\rho[1] & [0]\\ [0] & [0]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{V}^1\\ gradV_x^1\\ gradV_y^1\\ gradV_z^1\end{pmatrix}=\int_{V_\infty} dv\mathbf{V}^{1T}\rho\mathbf{V}^1>0$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!