

Решение обратной задачи рассеяния для уравнения акустики в трехмерных средах и построение изображений слоистых сред

А. В. Баев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Гальперинские чтения 2016

Одномерные обратные задачи

Уравнения и системы гиперболического типа

$$w_{tt} = c^2(x)w_{xx}, \quad w_{tt} = w_{xx} - q(x)w, \quad \begin{cases} v_t + v_x + z(x)u = 0 \\ u_t - u_x - z(x)v = 0 \end{cases}$$

Простейшие постановки и первые результаты

Алексеев А.С.(1962), Никольский Э.В.(1965),
Благовещенский А.С.(1966), Парийский Б.С.(1968),
Романов В.Г.(1968), Лаврентьев М.М.(1969)



Одномерные обратные задачи

Единственность, разрешимость, методы решения

Уравнения типа Гельфанда-Левитана-Крейна:

Благовещенский А.С.(1971), Баев А.В.(1988), Гольдин С.В.(2000)

Интегро-функциональные уравнения типа Вольтерра:

Благовещенский А.С.(1971), Романов В.Г. (1972), Кабанихин С.И. (1978), Яхно В.Г.(1980), Бухгейм А.Л.(1982), Баев А.В.(1983)

Вариационные методы:

Алексеев А.С.(1967), Кабанихин С.И.(1991), Баев А.В.(2003),
Чеверда В.А.(2014),

Метод обращения разностных схем:

Бухгейм А.Л.(1982), Баев А.В.(1986)



Многомерные обратные задачи

Единственность, разрешимость, методы решения

Проекционно-разностные и уравнения типа Гельфанда-Левитана-Крейна:

Кабанихин С.И.(1988), Шишленин М.А.(2011), Баев А.В.(2014)

Вариационные и итерационные методы:

Чеверда В.А.(2014), Шишленин М.А.(2016)

Метод граничных управлений:

Белишев М.И.(1987)

References (1979–2014):

A.Bamberger, G.Chavent, P.Lailly, R.Burrige, W.Rundell, P.Saks, W.Symes, R.Newton, G.Chavent, F.Clement, A.Tarantola, J.Carazzone, R.Snieder, M.Yamamoto, A.Ramm, M.Klibanov, L.Beilina, and others



Уравнения акустики

$$\rho(\mathbf{R})\mathbf{v}_t = -\nabla P, \quad P_t = -\rho(\mathbf{R})a^2(\mathbf{R}) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}_+^3$$

$$\mathbb{R}_+^3 = \{\xi, \eta, \zeta \mid \zeta > 0, -\infty < \xi, \eta < \infty\}$$

ρ — плотность, a — скорость, $\sigma = a\rho$ — акустическая жесткость

известно $\sigma_0(\xi, \eta) = a(\xi, \eta, 0)\rho(\xi, \eta, 0)$

Волновое уравнение акустики

$$P_{tt} = \rho(\mathbf{R})a^2(\mathbf{R}) \operatorname{div}(1/\rho(\mathbf{R}) \operatorname{grad} P)$$

$P(\mathbf{R}, t)$ — флуктуация давления



Уравнения акустики

$$\rho(\mathbf{R})\mathbf{v}_t = -\nabla P, \quad P_t = -\rho(\mathbf{R})a^2(\mathbf{R}) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}_+^3$$

$$\mathbb{R}_+^3 = \{\xi, \eta, \zeta \mid \zeta > 0, -\infty < \xi, \eta < \infty\}$$

ρ — плотность, a — скорость, $\sigma = a\rho$ — акустическая жесткость

известно $\sigma_0(\xi, \eta) = a(\xi, \eta, 0)\rho(\xi, \eta, 0)$

Волновое уравнение акустики

$$P_{tt} = \rho(\mathbf{R})a^2(\mathbf{R}) \operatorname{div}(1/\rho(\mathbf{R}) \operatorname{grad} P)$$

$P(\mathbf{R}, t)$ — флуктуация давления



Полугеодезические координаты

Уравнение эйконала

$$a^2(\xi, \eta, \zeta) |\nabla \tau|^2 = 1, \quad \zeta \geq 0, \quad \tau(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^2$$

$g(x, y, \tau) = \{g_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $|g| = \det g$, $\mathbf{R} = (\xi, \eta, \zeta)$ — декартовы,

$\mathbf{r} = (x, y, \tau)$ — полугеодезические координаты

Уравнение акустики

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = & \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ag_{22}}{\rho\sqrt{|g|}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ag_{21}}{\rho\sqrt{|g|}} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ & - \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ag_{12}}{\rho\sqrt{|g|}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ag_{11}}{\rho\sqrt{|g|}} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sqrt{|g|}}{a\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) \end{aligned}$$

$$p(x, y, \tau, t) = P(\xi(x, y, \tau), \eta(x, y, \tau), \zeta(x, y, \tau), t)$$



Уравнение эйконала

$$a^2(\xi, \eta, \zeta) |\nabla \tau|^2 = 1, \quad \zeta \geq 0, \quad \tau(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^2$$

$g(x, y, \tau) = \{g_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $|g| = \det g$, $\mathbf{R} = (\xi, \eta, \zeta)$ — декартовы,
 $\mathbf{r} = (x, y, \tau)$ — полугеодезические координаты

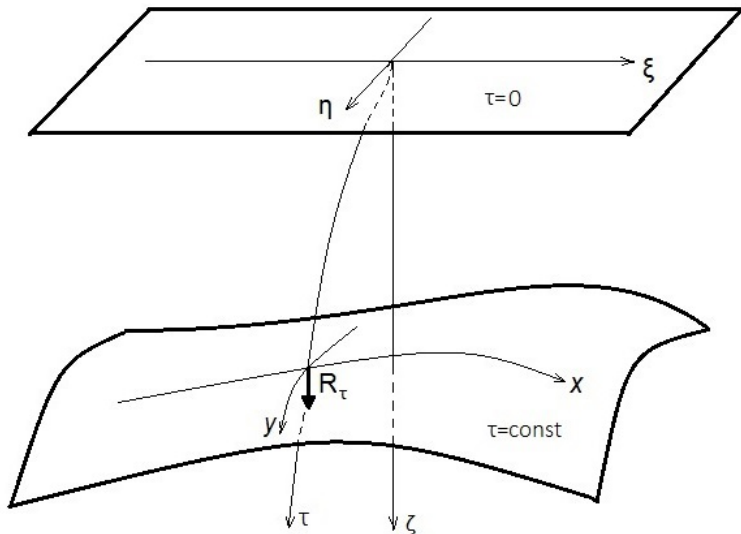
Уравнение акустики

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = & \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ag_{22}}{\rho\sqrt{|g|}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ag_{21}}{\rho\sqrt{|g|}} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ & - \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ag_{12}}{\rho\sqrt{|g|}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ag_{11}}{\rho\sqrt{|g|}} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{a\rho}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sqrt{|g|}}{a\rho} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) \end{aligned}$$

$$p(x, y, \tau, t) = P(\xi(x, y, \tau), \eta(x, y, \tau), \zeta(x, y, \tau), t)$$



Полугеодезические координаты



Волновое уравнение

Волновое уравнение

$$\sigma p_{tt} = (\sigma p_\tau)_\tau + (b p_x)_x - (d p_x)_y - (d p_y)_x + (c p_y)_y$$

$$b = \hat{a}^2 g_{22}/|g|, \quad c = \hat{a}^2 g_{11}/|g|, \quad d = \hat{a}^2 g_{12}/|g| = \hat{a}^2 g_{21}/|g|, \quad \sigma = \sqrt{|g|}/(a\rho)$$

$$p_{tt} = p_{\tau\tau} + 2/s(s_\tau p_\tau + b s_x p_x - d s_y p_x - d s_x p_y + c s_y p_y) \\ + (b p_x)_x - (d p_x)_y - (d p_y)_x + (c p_y)_y$$

$$p = w/s, \quad s = \sqrt{\sigma}, \quad s_0 = \sqrt{\sigma_0}$$

Уравнение Клейна-Гордона

$$w_{tt} = w_{\tau\tau} + (b w_x)_x - (d w_x)_y - (d w_y)_x + (c w_y)_y - q w$$

$$q : \quad s q = s_{\tau\tau} + (b s_x)_x - (d s_x)_y - (d s_y)_x + (c s_y)_y$$



Волновое уравнение

$$\sigma p_{tt} = (\sigma p_\tau)_\tau + (\sigma b p_x)_x - (\sigma d p_x)_y - (\sigma d p_y)_x + (\sigma c p_y)_y$$

$$b = \hat{a}^2 g_{22}/|g|, \quad c = \hat{a}^2 g_{11}/|g|, \quad d = \hat{a}^2 g_{12}/|g| = \hat{a}^2 g_{21}/|g|, \quad \sigma = \sqrt{|g|}/(a\rho)$$

$$p_{tt} = p_{\tau\tau} + 2/s(s_\tau p_\tau + b s_x p_x - d s_y p_x - d s_x p_y + c s_y p_y) \\ + (b p_x)_x - (d p_x)_y - (d p_y)_x + (c p_y)_y$$

$$p = w/s, \quad s = \sqrt{\sigma}, \quad s_0 = \sqrt{\sigma_0}$$

Уравнение Клейна-Гордона

$$w_{tt} = w_{\tau\tau} + (b w_x)_x - (d w_x)_y - (d w_y)_x + (c w_y)_y - q w$$

$$q : \quad s q = s_{\tau\tau} + (b s_x)_x - (d s_x)_y - (d s_y)_x + (c s_y)_y$$



Волновое уравнение

$$\sigma p_{tt} = (\sigma p_\tau)_\tau + (\sigma b p_x)_x - (\sigma d p_x)_y - (\sigma d p_y)_x + (\sigma c p_y)_y$$

$$b = \hat{a}^2 g_{22}/|g|, \quad c = \hat{a}^2 g_{11}/|g|, \quad d = \hat{a}^2 g_{12}/|g| = \hat{a}^2 g_{21}/|g|, \quad \sigma = \sqrt{|g|}/(a\rho)$$

$$p_{tt} = p_{\tau\tau} + 2/s(s_\tau p_\tau + b s_x p_x - d s_y p_x - d s_x p_y + c s_y p_y) \\ + (b p_x)_x - (d p_x)_y - (d p_y)_x + (c p_y)_y$$

$$p = w/s, \quad s = \sqrt{\sigma}, \quad s_0 = \sqrt{\sigma_0}$$

Уравнение Клейна-Гордона

$$w_{tt} = w_{\tau\tau} + (b w_x)_x - (d w_x)_y - (d w_y)_x + (c w_y)_y - q w$$

$$q : \quad s q = s_{\tau\tau} + (b s_x)_x - (d s_x)_y - (d s_y)_x + (c s_y)_y$$



Прямая и обратная задачи

Область $\mathbb{R}_+^4 = \mathbb{R}_+^3 \times (0, \infty)$

Прямая задача рассеяния

$$w_{tt} = w_{\tau\tau} + (bw_x)_x - (dw_x)_y - (dw_y)_x + (cw_y)_y - qw$$
$$w(x, y, \tau, 0) = w_t(x, y, \tau, 0) = 0, \quad w_x(x, y, 0, t) = -\varphi(x, y, t)$$

Обратная задача рассеяния

- по полю $w_t(x, y, 0, t) = f(x, y, t)$
- найти $b(x, y, \tau), c(x, y, \tau), d(x, y, \tau), s(x, y, \tau)$

Построение изображения среды

- по $b(x, y, \tau), c(x, y, \tau), d(x, y, \tau), s(x, y, \tau)$
- построить глубинный разрез $a(\xi, \eta, \zeta), \rho(\xi, \eta, \zeta)$



Прямая и обратная задачи

Область $\mathbb{R}_+^4 = \mathbb{R}_+^3 \times (0, \infty)$

Прямая задача рассеяния

$$w_{tt} = w_{\tau\tau} + (bw_x)_x - (dw_x)_y - (dw_y)_x + (cw_y)_y - qw$$
$$w(x, y, \tau, 0) = w_t(x, y, \tau, 0) = 0, \quad w_x(x, y, 0, t) = -\varphi(x, y, t)$$

Обратная задача рассеяния

- по полю $w_t(x, y, 0, t) = f(x, y, t)$
- найти $b(x, y, \tau), c(x, y, \tau), d(x, y, \tau), s(x, y, \tau)$

Построение изображения среды

- по $b(x, y, \tau), c(x, y, \tau), d(x, y, \tau), s(x, y, \tau)$
- построить глубинный разрез $a(\xi, \eta, \zeta), \rho(\xi, \eta, \zeta)$



Прямая и обратная задачи

Область $\mathbb{R}_+^4 = \mathbb{R}_+^3 \times (0, \infty)$

Прямая задача рассеяния

$$w_{tt} = w_{\tau\tau} + (bw_x)_x - (dw_x)_y - (dw_y)_x + (cw_y)_y - qw$$
$$w(x, y, \tau, 0) = w_t(x, y, \tau, 0) = 0, \quad w_x(x, y, 0, t) = -\varphi(x, y, t)$$

Обратная задача рассеяния

- по полю $w_t(x, y, 0, t) = f(x, y, t)$
- найти $b(x, y, \tau), c(x, y, \tau), d(x, y, \tau), s(x, y, \tau)$

Построение изображения среды

- по $b(x, y, \tau), c(x, y, \tau), d(x, y, \tau), s(x, y, \tau)$
- построить глубинный разрез $a(\xi, \eta, \zeta), \rho(\xi, \eta, \zeta)$



Задача рассеяния в приближении Галёркина

2L-периодическая среда

$$w(x, y, \tau, t) = w_m^n(\tau, t) \psi_m^n(x, y), \quad \psi_m^n(x, y) = \exp\{i(\lambda_m x + \mu^n y)\}$$

$$\lambda_m = \pi m / L_x, \quad \mu^n = \pi n / L_y, \quad m, n \in \mathbf{N} = \{0, \pm 1, \dots, \pm N\}$$

$$\begin{aligned} W_{tt} &= W_{\tau\tau} - \hat{Q}(\tau)W, \quad \tau, t > 0, \quad W(\tau, 0) = W_t(\tau, 0) = 0, \quad \tau > 0 \\ W_\tau(0, t) &= -\Theta'(t), \quad t \geq 0, \quad W(\tau, t) = \{w_{mj}^{nk}\}, \quad \Theta(t) = \theta(t)\{\delta_{mj}^{nk}\} \end{aligned}$$

$$\hat{Q}(\tau) = Q(\tau) + \Lambda B(\tau)\Lambda - MD(\tau)\Lambda - \Lambda D(\tau)M + MC(\tau)M$$

$$S'' - \hat{Q}(\tau)S = 0, \quad \tau > 0, \quad S(0) = S_0, \quad S'(0) = 0$$

Обратная задача в T -локальной постановке

по следу $W_t(0, t) = F(t)$, $t \in [0, 2T]$, определить тензоры $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$, $S(\tau)$, $\tau \in [0, T]$



Задача рассеяния в приближении Галёркина

2L-периодическая среда

$$w(x, y, \tau, t) = w_m^n(\tau, t) \psi_m^n(x, y), \quad \psi_m^n(x, y) = \exp\{i(\lambda_m x + \mu^n y)\}$$

$$\lambda_m = \pi m / L_x, \quad \mu^n = \pi n / L_y, \quad m, n \in \mathbf{N} = \{0, \pm 1, \dots, \pm N\}$$

$$\begin{aligned} W_{tt} &= W_{\tau\tau} - \widehat{Q}(\tau)W, \quad \tau, t > 0, \quad W(\tau, 0) = W_t(\tau, 0) = 0, \quad \tau > 0 \\ W_\tau(0, t) &= -\Theta'(t), \quad t \geq 0, \quad W(\tau, t) = \{w_{mj}^{nk}\}, \quad \Theta(t) = \theta(t)\{\delta_{mj}^{nk}\} \end{aligned}$$

$$\widehat{Q}(\tau) = Q(\tau) + \Lambda B(\tau)\Lambda - MD(\tau)\Lambda - \Lambda D(\tau)M + MC(\tau)M$$

$$S'' - \widehat{Q}(\tau)S = 0, \quad \tau > 0, \quad S(0) = S_0, \quad S'(0) = 0$$

Обратная задача в T -локальной постановке

по следу $W_t(0, t) = F(t)$, $t \in [0, 2T]$, определить тензоры $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$, $S(\tau)$, $\tau \in [0, T]$



Задача рассеяния в приближении Галёркина

2L-периодическая среда

$$w(x, y, \tau, t) = w_m^n(\tau, t) \psi_m^n(x, y), \quad \psi_m^n(x, y) = \exp\{i(\lambda_m x + \mu^n y)\}$$

$$\lambda_m = \pi m / L_x, \quad \mu^n = \pi n / L_y, \quad m, n \in \mathbf{N} = \{0, \pm 1, \dots, \pm N\}$$

$$\begin{aligned} W_{tt} &= W_{\tau\tau} - \widehat{Q}(\tau)W, \quad \tau, t > 0, \quad W(\tau, 0) = W_t(\tau, 0) = 0, \quad \tau > 0 \\ W_\tau(0, t) &= -\Theta'(t), \quad t \geq 0, \quad W(\tau, t) = \{w_{mj}^{nk}\}, \quad \Theta(t) = \theta(t)\{\delta_{mj}^{nk}\} \end{aligned}$$

$$\widehat{Q}(\tau) = Q(\tau) + \Lambda B(\tau)\Lambda - MD(\tau)\Lambda - \Lambda D(\tau)M + MC(\tau)M$$

$$S'' - \widehat{Q}(\tau)S = 0, \quad \tau > 0, \quad S(0) = S_0, \quad S'(0) = 0$$

Обратная задача в T -локальной постановке

по следу $W_t(0, t) = F(t)$, $t \in [0, 2T]$, определить тензоры $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$, $S(\tau)$, $\tau \in [0, T]$



Задачи рассеяния для системы

Задача рассеяния для системы Дирака

$$Z(\tau)S = S': \quad Z' + Z^2 = \hat{Q}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad Z(0) = 0$$

$$\begin{aligned} V_t + V_\tau + Z(\tau)U &= 0, & U_t - U_\tau - Z(\tau)V &= 0, & \tau, t > 0 \\ V(\tau, 0) = U(\tau, 0) &= 0, & V(0, t) + U(0, t) &= \Theta'(t), & \tau, t \geq 0 \end{aligned}$$

T -локальная постановка обратной задачи

по следу $U(0, t) = F(t)$, $t \in [0, 2T]$, определить тензор $Z(\tau)$,
 $\tau \in [0, T]$

Теорема (1)

Решение обратных задач рассеяния для уравнения Клейна-Гордона и системы Дирака единственно при любом $T > 0$

Задачи рассеяния для системы

Задача рассеяния для системы Дирака

$$Z(\tau)S = S': \quad Z' + Z^2 = \hat{Q}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad Z(0) = 0$$

$$\begin{aligned} V_t + V_\tau + Z(\tau)U &= 0, \quad U_t - U_\tau - Z(\tau)V = 0, \quad \tau, t > 0 \\ V(\tau, 0) = U(\tau, 0) &= 0, \quad V(0, t) + U(0, t) = \Theta'(t), \quad \tau, t \geq 0 \end{aligned}$$

T -локальная постановка обратной задачи

по следу $U(0, t) = F(t)$, $t \in [0, 2T]$, определить тензор $Z(\tau)$,
 $\tau \in [0, T]$

Теорема (1)

Решение обратных задач рассеяния для уравнения Клейна-Гордона и системы Дирака единственно при любом $T > 0$

Задачи рассеяния для системы

Задача рассеяния для системы Дирака

$$Z(\tau)S = S': \quad Z' + Z^2 = \hat{Q}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad Z(0) = 0$$

$$\begin{aligned} V_t + V_\tau + Z(\tau)U &= 0, \quad U_t - U_\tau - Z(\tau)V = 0, \quad \tau, t > 0 \\ V(\tau, 0) = U(\tau, 0) &= 0, \quad V(0, t) + U(0, t) = \Theta'(t), \quad \tau, t \geq 0 \end{aligned}$$

T -локальная постановка обратной задачи

по следу $U(0, t) = F(t)$, $t \in [0, 2T]$, определить тензор $Z(\tau)$,
 $\tau \in [0, T]$

Теорема (1)

Решение обратных задач рассеяния для уравнения Клейна-Гордона и системы Дирака единственно при любом $T > 0$

Разрешимость обратной задачи

Борновское приближение

$$Z(t) = -F(2t) \sim z(x, y, \tau) = -f(x, y, 2\tau)$$

Интеграл энергии

$$2\langle V, V \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle V, V \rangle_{L_2[0, 2T]} - \langle U, U \rangle_{L_2[0, 2T]} \equiv \Pi$$
$$\Gamma = \{\tau, t \geq 0 \mid \tau + t = 2T\}$$

$\Pi = \Pi(\Phi) > 0$ — поток энергии на границе $\tau = 0$ для источника $\Phi(t)$

Критерий разрешимости обратной задачи

$$\Pi_T = \inf_{\Phi} \{ \Pi(\Phi) \mid \langle \Phi, \Phi \rangle_{L_2[0, 2T]} = 1 \}$$

Теорема (2)

Обратная задача рассеяния для системы Дирака на отрезке $[0, T]$ разрешима тогда и только тогда, когда $\Pi_T > 0$

Разрешимость обратной задачи

Борновское приближение

$$Z(t) = -F(2t) \sim z(x, y, \tau) = -f(x, y, 2\tau)$$

Интеграл энергии

$$2\langle V, V \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle V, V \rangle_{L_2[0, 2T]} - \langle U, U \rangle_{L_2[0, 2T]} \equiv \Pi$$

$$\Gamma = \{\tau, t \geq 0 \mid \tau + t = 2T\}$$

$\Pi = \Pi(\Phi) > 0$ — поток энергии на границе $\tau = 0$ для источника $\Phi(t)$

Критерий разрешимости обратной задачи

$$\Pi_T = \inf_{\Phi} \{ \Pi(\Phi) \mid \langle \Phi, \Phi \rangle_{L_2[0, 2T]} = 1 \}$$

Теорема (2)

Обратная задача рассеяния для системы Дирака на отрезке $[0, T]$ разрешима тогда и только тогда, когда $\Pi_T > 0$

Разрешимость обратной задачи

Борновское приближение

$$Z(t) = -F(2t) \sim z(x, y, \tau) = -f(x, y, 2\tau)$$

Интеграл энергии

$$2\langle V, V \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle V, V \rangle_{L_2[0, 2T]} - \langle U, U \rangle_{L_2[0, 2T]} \equiv \Pi$$
$$\Gamma = \{\tau, t \geq 0 \mid \tau + t = 2T\}$$

$\Pi = \Pi(\Phi) > 0$ — поток энергии на границе $\tau = 0$ для источника $\Phi(t)$

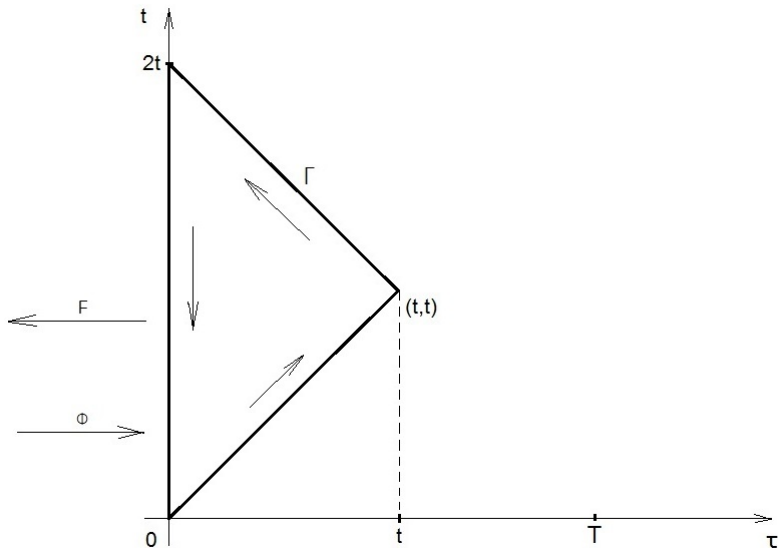
Критерий разрешимости обратной задачи

$$\Pi_T = \inf_{\Phi} \{ \Pi(\Phi) \mid \langle \Phi, \Phi \rangle_{L_2[0, 2T]} = 1 \}$$

Теорема (2)

Обратная задача рассеяния для системы Дирака на отрезке $[0, T]$ разрешима тогда и только тогда, когда $\Pi_T > 0$

Интеграл энергии



Построение изображений среды

$$b, c, d, s: \quad \sqrt{bc - d^2} = a^2 / \sqrt{|g|}, \quad s^2 = \sqrt{|g|} / (a\rho) \quad \Rightarrow \quad \gamma = a/\rho$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau} = a(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y}{|\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y|}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r})$$

$$a^2 = \sqrt{|g|} \sqrt{bc - d^2}, \quad \sqrt{|g|} = |\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y|$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau} = \sqrt[4]{bc - d^2} \frac{\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y}{\sqrt{|\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y|}}, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad \mathbf{R}|_{\tau=0} = \mathbf{r}|_{\tau=0} \quad (1)$$

Теорема (3)

Пусть b, c, d, s — решение обратной задачи рассеяния для уравнения Клейна-Гордона, и существует решение $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ задачи Коши (1). Тогда однозначно определены функции $\mathbf{r}(\mathbf{R})$, $a(\mathbf{R})$ и $\rho(\mathbf{R})$

Построение изображений среды

$$b, c, d, s: \quad \sqrt{bc - d^2} = a^2 / \sqrt{|g|}, \quad s^2 = \sqrt{|g|} / (a\rho) \quad \Rightarrow \quad \gamma = a/\rho$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau} = a(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y}{|\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y|}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r})$$

$$a^2 = \sqrt{|g|} \sqrt{bc - d^2}, \quad \sqrt{|g|} = |\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y|$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau} = \sqrt[4]{bc - d^2} \frac{\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y}{\sqrt{|\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y|}}, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad \mathbf{R}|_{\tau=0} = \mathbf{r}|_{\tau=0} \quad (1)$$

Теорема (3)

Пусть b, c, d, s — решение обратной задачи рассеяния для уравнения Клейна-Гордона, и существует решение $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ задачи Коши (1). Тогда однозначно определены функции $\mathbf{r}(\mathbf{R})$, $a(\mathbf{R})$ и $\rho(\mathbf{R})$

1. Баев А. В. О t -локальной разрешимости обратных задач рассеяния в 2- D слоистых средах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2015. Т. 55. № 1. С. 95–114
2. Баев А. В. О построении изображений слоистых сред в обратных задачах рассеяния для волнового уравнения акустики // Математическое моделирование. 2015. Т. 28. № 5. С. 3–23
3. Баев А. В. О решении обратной задачи рассеяния для уравнения акустики в трехмерных средах и построении изображений слоистых сред // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56. № 12. С. 110–122 (в печати)

