

Использование нечетких множеств для учета неопределенности данных при планировании добычи углеводородов

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
Федерального исследовательского центра
«Информатика и управление» Российской академии наук

Хачатуров Владимир Рубенович, д.ф.-м.н.,
Соломатин Александр Николаевич, к.ф.-м.н.,
Скиба Александр Константинович, к.ф.-м.н.,
Бобылев Вячеслав Николаевич

Планирование добычи для группы месторождений

В отделе методов проектирования развивающихся систем Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН в течение многих лет ведутся работы по планированию развития и проектированию освоения газодобывающих регионов и месторождений. В частности, были разработаны Система формирования планов добычи нефти и Система перспективного планирования добычи газа (СПДГ), которая широко применялась в 80-90-х гг. для планирования разработки групп газовых месторождений Западной, Восточной Сибири, а также крупных месторождений, включая Ямбургское и Оренбургское.

Дальнейшим развитием системы СПДГ в условиях рыночной экономики и необходимости решения оптимизационных задач является Система моделирования и оптимизации добычи газа.

- В основе работы системы лежит имитационная модель группы газовых месторождений, позволяющая формировать прогнозную динамику добычи газа по месторождениям для заданных управлений (например, план добычи по группе), а также многочисленные технико-экономические показатели добычи.
- В рыночной экономике план добычи нельзя считать заданным, поэтому ищутся оптимальные планы, максимизирующие критерий накопленной добычи по группе месторождений; при этом непрерывная задача оптимизации сводится к дискретной путем введения равномерной сетки и решается при помощи аппроксимационно-комбинаторного метода в сочетании с методом ветвей и границ.
- Помимо приближенного оптимального, находятся все близкие к нему решения, что позволяет производить многокритериальную оптимизацию с учетом дополнительных критериев оценки решений.

В настоящее время ведутся работы по совершенствованию системы для учета неопределенности исходных данных, в первую очередь запасов (ресурсов) газа различных категорий, на основе использования аппарата нечетких множеств.

Проблема неопределенности исходных данных

Обычно рассматриваются постановки и методы решения детерминированных задач, хотя в большинстве практических задач содержится неопределенность в том или ином виде.

Неопределенность - это неотъемлемое свойство объективной действительности вообще и экономической среды в частности - из-за наличия большого числа действующих факторов различной природы и направленности:

- при *стохастической* (вероятностной) неопределенности неизвестные факторы статистически устойчивы и представляют собой случайные величины (случайные функции) с известными законами распределения и их параметрами;
- при неопределенности *нестохастического вида* классическая статистическая выборка отсутствует: в этом случае либо нет достаточного количества наблюдений, чтобы подтвердить тот или иной закон распределения, либо наблюдаемые объекты нельзя считать однородными.

Имитационные и оптимизационные модели упомянутой системы являются детерминированными, что не совсем корректно. Для группы газовых месторождений некоторые характеристики более правильно рассматривать как недетерминированные (неопределенные): запасы газа различных категорий, уровень «полки», дебиты скважин, цены на газ и т. д.

Обычно для учета неопределенностей (в т.ч. в нефтегазодобыче) используется аппарат теории вероятностей. Но последнее время за рубежом и в России стали появляться работы по применению *аппарата нечетких множеств* при решении задач разработки и управления месторождениями углеводородов.

Нечеткие множества

В своих работах Л. Заде расширил классическое понятие множества, допустив, что функция принадлежности элемента множеству (характеристическая функция) может принимать любые значения в интервале $[0, 1]$.

Под **нечетким множеством** понимается совокупность $A = \{(u, \mu_A(u)) \mid u \in U\}$, где U - универсальное множество, а $\mu_A(u)$ - функция принадлежности, которая характеризует степень принадлежности элемента u универсального множества нечёткому множеству A и принимает значения в некотором линейно упорядоченном множестве M - множестве принадлежностей (обычно отрезок $[0, 1]$, соответствующий значениям вероятности).

Универсальное множество U	Запись нечеткого множества A
Дискретное множество $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$	$A = \sum_{i=1}^k \mu_A(u_i) / u_i$
Непрерывное множество	$A = \int_U \mu_A(u) / u$

При **дефаззификации** нечеткого множества соответствующей функции принадлежности сопоставляется некоторое характеризующее ее детерминированное число. Метод центра тяжести:

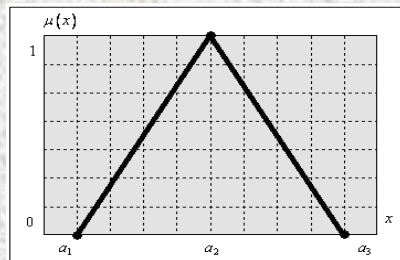
Универсальное множество U	Формула дефаззификации
Дискретное множество	$a = \frac{\sum_{i=1}^k u_i \mu_A(u_i)}{\sum_{i=1}^k \mu_A(u_i)}$
Непрерывное множество	$a = \frac{\int_{u_1}^{u_2} u \mu_A(u) du}{\int_{u_1}^{u_2} \mu_A(u) du}$

Нечеткие числа и операции над ними

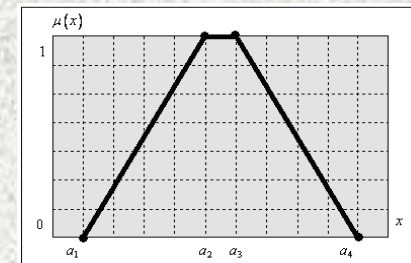
Нечетким числом называется выпуклое нормализованное нечеткое подмножество множества действительных чисел, имеющее нормализованную выпуклую кусочно-непрерывную функцию принадлежности. Широко используются нечеткие *трапецевидные (треугольные)* нечеткие числа, которые имеют функцию принадлежности в виде трапеции (треугольника), задаваемую упорядоченной четверкой (тройкой) действительных чисел, определяющих вершины этих геометрических фигур.

- Если некоторое недетерминированное значение точно находится в интервале значений от a_2 до a_3 и при этом оно точно не будет меньше a_1 и больше a_4 , то такая неопределенность выражается в виде трапецевидного нечеткого числа $A = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$.
- Если знания эксперта более определены (a_1 и a_3 - минимально и максимально возможные значения, a_2 - наиболее правдоподобное значение), то неопределенность выражается в виде треугольного нечеткого числа $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.
- При наименее определенных знаниях о значении показателя (значение лежит в диапазоне от a_1 до a_2) неопределенность выражается в виде интервального числа.

Треугольное
число



Трапецевидное
число



Над нечеткими числами, как и над обычными, определяются *арифметические операции*, но гораздо более трудоемкие. Так, операция сложения трапецевидных чисел требует 4 арифметических операции над координатами вершин трапеции, умножения – 8 операций.

Выбор аппарата нечетких множеств

Преимущества аппарата нечетких множеств как средства формализации неопределенностей:

А). Применение вероятностей оправдано для статистически однородных случайных событий, когда можно определить случайные величины с известными законами распределения и их параметрами. Неопределенность же в экономической деятельности в целом *не обладает статистической природой*, а объекты газодобычи во многом уникальны.

В). Исключаются проблемы, связанные *с заданием и обработкой недетерминированных данных*:

- понятие неопределенности гораздо более естественно выражается нечеткостью, чем случайностью;
- не требуется адекватного задания вида и параметров плотностей распределения;
- эксперт имеет дело не с косвенными оценками (таким как вероятности), а с прямыми данными о разбросе значений параметров;
- появляется возможность оперировать качественными вербальными понятиями («около», «больше чем», «преимущественно» и т. д.), что ближе к человеческому мышлению и языку;
- снимается проблема учета взаимной зависимости исходных данных;
- аппарат нечетких множеств с точки зрения вычислительной реализации намного проще аппарата теории вероятностей, где необходимо оперировать с плотностями распределения вероятностей.

Описание неопределенностей с использованием *интервальной математики* является частным случаем их описания с помощью нечетких множеств. Оно хотя и обеспечивает более высокую скорость расчетов, но является достаточно грубым инструментом; пример - мгновенный переход от 0% к 100% вероятности при входе в границы интервала.

Вывод: для решения задач моделирования и оптимизации разработки группы газовых месторождений с учетом неопределенности исходных данных наиболее адекватным математическим аппаратом, позволяющим формализовать эту неопределенность, является аппарат нечетких множеств.

Нечеткое расширение детерминированной задачи

Неопределенное программирование - это унифицированный подход к решению оптимизационных задач в условиях неопределенности общего вида, объединяющий стохастическое, нечеткое и неточное (интервальное) программирование. Для всех видов неопределенного программирования целевая функция и ограничения задаются явно в аналитическом виде.

Для задачи формирования стратегий разработки группы газовых месторождений даже для детерминированного случая используется имитационная модель, а при решении задачи оптимизации накопленной добычи производится переход от поиска оптимального решения для непрерывного случая к поиску приближенного оптимального решения для дискретного случая с использованием сетки. Для этой задачи целевая функция и ограничения не могут быть заданы явно, что не позволяет применять стандартные подходы неопределенного программирования.

Предлагается сохранить общую схему решения задачи, диалоговый интерфейс, программное и информационное обеспечение, реализованные для детерминированного случая, используя вместо детерминированных значений и операций с ними соответствующие нечеткие числа и нечеткую арифметику. Такой подход называется **нечетким расширением** детерминированной задачи.

Кроме того:

- не все исходные данные и не для всех месторождений группы могут рассматриваться как неопределенные (нечеткие);
- средства моделирования и оптимизации должны иметь единообразный диалоговый интерфейс, программное и информационное обеспечение независимо от того, все или не все исходные данные являются детерминированными.

Этапы решения задачи планирования с учетом неопределенности исходных данных

Этапы решения задачи формирования стратегий разработки группы газовых месторождений с учетом неопределенности исходных данных:

- ввод детерминированных исходных данных и функций принадлежности для нечетких чисел, отражающих неопределенность некоторых исходных данных,
- подсчет запасов (ресурсов) газа различных категорий по месторождениям с учетом неопределенности этих данных,
- сведение непрерывной оптимизационной задачи к дискретной за счет введения равномерной сетки,
- оптимизация накопленной добычи с нахождением множества вариантов, близких к оптимальному, и с использованием арифметических операций над нечеткими числами,
- дефаззификация нечетких чисел, задающих значения функционала накопленной добычи,
- многовариантные расчеты значений критериев за счет прямого прогона имитационной модели для всех близких к оптимальному вариантов, в том числе с использованием нечеткой арифметики,
- дефаззификация нечетких чисел, задающих значения критериев оценки близких вариантов решений,
- многокритериальный анализ близких вариантов по дополнительным критериям оценки на основании результатов дефаззификации,
- вывод и анализ результатов в виде таблиц и графиков для наилучшего выбранного варианта решения.

Проблема неопределенности оценки запасов

Неопределенность в оценке запасов (ресурсов) природного газа различных категорий является **наиболее значимой** среди всех видов неопределенности при решении задач моделирования и оптимизации разработки группы газовых месторождений (далее запасы - как собственно запасы, так и прогнозные ресурсы газа).

В России оценка запасов газа производится в основном с использованием детерминированных методов, за рубежом запасы углеводородов определяются и утверждаются в виде **функций распределения вероятностей**. Однако:

- обычно данных для построения функций распределения для каждого параметра бывает недостаточно,
- сами операции с этими функциями очень громоздки,
- условие однородности выборки объектов обычно не соблюдается из-за уникальных геологических особенностей каждого объекта.

Приемлемую точность оценки запасов существующими методами можно гарантировать только для высокопористого, однородного высокопроницаемого пласта с известными контуром газоносности и положением газовой контакта, иначе погрешность оценки может достигать 20-30%.

Дополнительная проблема - неоднозначность и динамичность **существующих классификаций** углеводородов. В настоящее время в России можно одновременно рассматривать сразу четыре Классификации запасов и ресурсов нефти и горючих газов: базовая 1983 г., временная действующая 2001 г., так и не введенная в действие 2005 г., утвержденная в 2013 г. и намеченная к вводу в действие с 01.01.2016 г.

Появление новых классификаций запасов и ресурсов нефти и газа связано с развитием экономики (новые задачи, методы оценки, технологии, законодательство, изменение спроса и цен).

Системная модель движения газа по категориям

Любая категория характеризует некоторый уровень знаний о запасах газа, находящихся в недрах некоторой территории. В теории информации и в теории систем важнейшим понятием является *энтропия* – мера неопределенности информации и дезорганизации в системах любой природы. Энтропия в системе запасов и ресурсов постоянно уменьшается по мере движения от низшей категории ресурсов D2 (по Классификации 1983 г.) к высшей категории запасов А.

Разобьем множество объектов газодобычи M на 9 непересекающихся подмножеств $\{K_j\}, j = \overline{0,8}$. Элементами каждого подмножества являются объекты с запасами определенной категории, объем которых задается нечеткими числами. Подмножество K_1 будет соответствовать категории D2, подмножество K_2 – категории D1, ..., K_7 – категории А. Вводится также подмножество объектов K_0 с отсутствием информации о величине запасов и подмножество объектов K_8 с полностью извлеченными запасами.

Т.к. в процессе разработки приобретаются дополнительные знания о запасах объектов, разбиение множества M постоянно изменяется. Поэтому целесообразно рассматривать в дискретные моменты времени t *динамические подмножества* $\{K_j(t)\}$ со следующими свойствами:

- если объект $a \in K_j(\tau)$, где $j = \overline{1,8}$, то при любых $t > \tau, i < j$ объект $a \notin K_j(t)$ (объект не может быть исключен из высшей категории и затем включен в низшую категорию),
- если объект $a \in K_j(\tau)$, где $j = \overline{1,7}$, то существует $t > \tau$ такое, что объект $a \in K_{j+1}(t)$ (объект последовательно включается во все более высокие категории).

Для любой текущей категории с номером j из свойств семейства $\{K_j(t)\}$ следует, например, что:

- подмножество $K_j(t) \Delta K_j(t+1)$, то есть симметрическая разность подмножеств, состоит из объектов, изменивших свое состояние за период от t до $t+1$;
- подмножество $K_j(t+1) \setminus K_j(t)$ состоит из объектов, которые перешли к моменту времени $t+1$ из подмножества для категории $j-1$, в текущее подмножество для категории j и т.д.

Оценка достоверности запасов

Оценим относительную точность подсчета запасов газа различных категорий, если нечетко определенный запас x описывается функцией принадлежности $\mu(x)$.

Обозначим через x' левую границу множества α -уровня при $\alpha = 1/2$ (то есть числового множества $\{x : \mu(x) \geq 1/2\}$), правую - через x'' и введем обозначение

$$p = (x'' - x') / (x'' + x') = \Delta x / \hat{x},$$

где $\hat{x} = (x'' + x') / 2$, $\Delta x = (x'' - x') / 2$ соответственно, средняя величина запаса x и абсолютная погрешность его подсчета (оценки).

Число p определяет **относительную погрешность** подсчета нечетко определенного запаса x , описанного функцией принадлежности $\mu(x)$, что позволит далее оценить достоверность подсчета величины запаса. Можно реализовать количественный подход к категориям, сопоставив каждой категории H значение функции

$$H(p) = 1 - p$$

согласно таблице, основанной на опытных данных.

H	Q	A	B	$C1$	$C2$	$C3$	$D1$	$D2$
p	0	1/10	1/5	1/3	1/2	2/3	5/7	1
$1 - p$	1	9/10	4/5	2/3	1/2	1/3	2/7	0

Столбцы таблицы помечены обозначениями запасов и ресурсов в соответствии с Классификацией 1983 г.; дополнительно добавлена условная категория Q – категория накопленной добычи.

Набор значений в таблице p может измениться со временем и в значительной степени субъективен, что адекватно отражает природу нечеткости, связанную с субъектом-экспертом.

Подсчет запасов газа с учетом неопределенности

В настоящее время используются различные методы оценки извлекаемых запасов газа: объемный метод, метод материального баланса, оценка на основе использования трехмерных геолого-математических моделей и т. д.

Объемный метод является практически универсальным для подсчета запасов любой залежи или ее части при любой степени изученности. Его сущность - определение объема свободного газа, приведенного к стандартным условиям, в насыщенных им объемах пустотного пространства пород-коллекторов залежей газа.

Известна модификация метода с учетом неопределенности исходных данных (символом \sim выделяются величины, которые задаются нечетко):

$$\tilde{V} = (\tilde{S} \cdot \tilde{h} \cdot \tilde{m} \cdot \tilde{\alpha} \cdot p \cdot T_{cm}) / (z \cdot p_{atm} \cdot T_{nl}) = \tilde{S} \cdot \tilde{h} \cdot \tilde{m} \cdot \tilde{\alpha} \cdot C$$

V - объем запасов газа,

S - горизонтальный профиль площади газоносности,

h - среднее значение газонасыщенной толщины,

m - среднее значение газонасыщенной пористости,

α - среднее значение газонасыщенности пористой среды,

p - средневзвешенное пластовое давление,

T_{cm} - стартовая температура, равная К,

z - средний коэффициент сверхсжимаемости газа,

T_{nl} - атмосферное давление,

p_{atm} - средняя пластовая температура, К.

Некоторые оптимизационные задачи

Рассмотренная системная модель является основой для постановки и решения ряда оптимизационных задач, в т.ч. связанных с оптимизацией перевода объектов из одной категории запасов в другую, для различных целевых функций и различных ограничений.

Для оптимизационных задач возможны следующие *ограничения*:

- на совокупные среднеожидаемые запасы газа,
- на совокупные гарантированные запасы газа,
- на совокупные затраты,
- на время перевода объектов в более высокую категорию,
- на количество объектов, переводимых в более высокую категорию.

Рассматриваются следующие оптимизационные *задачи*:

- о максимизации - совокупных среднеожидаемых запасов газа, совокупных гарантированных значений запасов газа, количества объектов, запасы которых переводятся в более высокую категорию;
- о минимизации: совокупных затрат, времени перевода запасов объектов в более высокую категорию;
- о выборе наиболее изученных по величине запасов объектов.

Учет запасов различных категорий

Пусть для месторождения определен объем запасов V_1 категории А+В+С1, объем запасов V_2 категории С2 и объем ресурсов V_3 категории С3. Необходимо оценить суммарные запасы газа на месторождении с учетом того, что V_1 - детерминированная величина, а V_2 и V_3 могут быть нечеткими либо интервальными числами.

Возможные *способы определения* суммарных запасов газа на месторождении.

I. Суммарные запасы $V_1 + V_2 + V_3$ определяются по правилу сложения нечетких чисел с последующей дефазификацией полученного нечеткого числа; интервальные числа сводятся к нечетким.

II. Среднее значение запасов рассчитывается как значение среднеожидаемых прогнозируемых запасов соответствующей категории; для этого нечеткие (интервальные) числа V_2 и V_3 преобразуются в четкие путем их дефазификации методом центра тяжести.

III. Гарантированное значение запасов газа y для некоторого объекта j -й категории является оценкой нечетко определенных запасов газа при заданном уровне риска k_{A_j} . Тогда для произвольного нечеткого числа $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и заданного значения y такого, что $a_1 < y < a_4$, вероятность (степень риска) того, что реальное значение запасов газа для данного объекта не превысит величины y , составит

$$k_{A_j}(y) = \left(\int_{a_1}^y \mu_{A_j}(u) du \right) / \left(\int_{a_1}^{a_4} \mu_{A_j}(u) du \right).$$

Задавая различные значения уровня риска k_{A_j} , из уравнения можно однозначно определить соответствующие гарантированные значения запасов для категорий С2 и С3.

Для случаев II и III полученные детерминированные значения объемов запасов газа различных категорий складываются, формируя суммарный объем запасов для каждого месторождения.

IV. Запасы различных категорий некоторого месторождения рассматриваются как различные независимые месторождения, поэтому каждое месторождение трансформируется в три месторождения с подряд идущими номерами, соответственно, для категорий А+В+С1, С2 и С3.

Особенности реализации Системы моделирования и оптимизации добычи газа

Задачи адаптации системы. При реализации нечеткого расширения требуется эффективная адаптация программного и информационного обеспечения Системы моделирования и оптимизации добычи газа, разработанного для детерминированных исходных данных. Необходимо обеспечить:

- удобный для пользователя ввод и вывод неопределенной информации,
- эффективные по памяти и времени вычислений хранение и обработку неопределенной информации,
- формирование и обработку неопределенной информации о запасах газа различных категорий.

Диалоговый интерфейс. Добавляются элементы интерфейса, задающие дополнительные режимы работы:

- режим обработки данных: только детерминированные данные/также недетерминированные данные,
- возможность задания неопределенных данных для каждого месторождения,
- момент дефаззификации нечетких чисел: после расчетов с нечеткими числами/перед расчетами для увеличения скорости вычислений,
- расчет и обработка значений запасов газа различных категорий.

Формирование и обработка запасов газа различных категорий. Данная функциональность реализуется в дополнительном блоке Системы:

- расчет запасов газа различных категорий объемным методом с учетом неопределенности значений параметров метода,
- оптимизация множества объектов, переводимых в следующую более высокую категорию запасов при различных ограничениях,
- суммирование для каждого месторождения различными способами нечетко определенных запасов газа различных категорий для получения общей оценки запасов.

Неопределенные исходные данные, их ввод и хранение

Неопределенные исходные данные. Хотя большинство исходных данных системы можно трактовать как неопределенные, это существенно усложняет работу системы. Поэтому недетерминированные исходные данные предлагается задавать (выбор производится пользователем):

- только для некоторых месторождений группы, например, наиболее крупных;
- только для некоторых показателей - наиболее важных и/или имеющих наибольшую неопределенность значений - объем запасов газа различных категорий, уровень постоянной добычи, начальные дебиты скважин, удельные капиталовложения в бурение и обустройство и т. д.

Ввод исходных данных. Для задания неопределенных исходных данных используются либо нечеткие числа (трапециевидные или треугольные) либо интервалы. При вводе данных пользователь определяет:

- месторождения и показатели, для которых будут вводиться недетерминированные данные;
- тип вводимых данных: нечеткое трапециевидное число, нечеткое треугольное число, интервальное число или детерминированная величина;
- параметры, задающие недетерминированную величину: четыре значения для трапециевидного нечеткого числа, три - для треугольного, два - для интервального и одно – для обычного числа.

Хранение данных. Данные любого из 4-х перечисленных типов хранятся в унифицированном формате – в виде специальных записей, каждая из которых содержит следующие шесть полей:

- тип данных, которые хранятся в записи - детерминированное значение, интервальное число, треугольное нечеткое число, трапециевидное нечеткое число;
- значения a_1, a_2, a_3, a_4 , характеризующие нечеткое число, причем в зависимости от типа данных некоторые значения могут быть нулевыми: a_3 для треугольного нечеткого числа, a_2, a_3 для интервального числа и a_2, a_3, a_4 для детерминированной величины;
- детерминированное значение, полученное в результате дефаззификации нечеткого числа.

Расчет и вывод неопределенных данных

- Сокращение времени расчетов.** Сокращение времени расчетов при работе с нечеткими - ключевая проблема при реализации нечеткого расширения. Так, операция сложения трапециевидных чисел - это четыре обычных арифметических операции, а операция умножения – восемь. Предлагаемые решения:
- выбор минимально необходимого количества месторождений и входных показателей, для которых будет задаваться недетерминированная информация, чтобы уменьшить время работы с недетерминированными величинами при работе системы;
 - модификация программного кода системы с тем, чтобы выделить фрагменты кода, в которых будут обрабатываться только детерминированные величины;
 - программная реализация арифметических операций над нечеткими (интервальными) числами и процедур дефаззификации на языке Ассемблера;
 - дефаззификация нечетких величин не после нахождения оптимального и близких к нему решений, а до начала процесса оптимизации;
 - использование перегрузки арифметических операций, что позволяет использовать один знак операции для различных типов данных и не менять программный код, созданный для детерминированного случая.

Вывод результатов. Выводимые на экран результаты работы системы являются детерминированными свертками - результатами дефаззификации нечетких чисел. Сюда относятся:

- значения функционалов накопленной добычи газа,
- значения критериев оценки решений при многокритериальной оптимизации,
- табличные значения технико-экономических показателей добычи в блоке вывода результатов.

По желанию ЛПП для детального анализа на экран можно выдать функцию принадлежности нечеткого числа, соответствующего детерминированному значению.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Рассмотрено использование аппарата нечетких множеств для учета неопределенности исходных данных, включая запасы (ресурсы) углеводородов различных категорий, при планировании разработки группы месторождений.

- Обоснован выбор аппарата нечетких множеств при решении задачи формирования стратегий разработки группы месторождений с учетом неопределенности исходных данных.
- Предложен подход к реализации нечеткого расширения детерминированных задач моделирования и оптимизации разработки группы месторождений в условиях, когда целевая функция и ограничения оптимизационных задач не могут быть заданы аналитически.
- Рассмотрены различные задачи, возникающие при наличии неопределенностей в оценке запасов (ресурсов) различных категорий: рассмотрены модель движения запасов, различные оптимизационные задачи, проблема суммирования запасов различных категорий.
- Приведены решения по реализации Системы моделирования и оптимизации добычи газа с учетом неопределенности исходных данных на основе использования аппарата нечетких множеств.

Литература

1. *Алтунин А.Е., Семухин М.В.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2000. 352 с.
2. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. 2-е изд. М.: РХД, 2007. 468 с.
3. *Коньшева Л.К., Назаров Д.М.* Основы теории нечетких множеств. СПб: Питер, 2011. 192 с.
4. *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования. Пер. с англ. М.: БИНОМ, 2005. 416 с.
5. *Маргулов Р.Д., Хачатуров В.Р., Федосеев А.В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. М.: Недра, 1992. 287 с.
6. *Недосекин А.О.* Нечёткие множества и финансовый менеджмент. М.: Изд-во «Аудит и финансовый анализ», 2003. 184 с.
7. *Скиба А.К., Соломатин А.Н.* Моделирование и оптимизация стратегий разработки группы газовых месторождений. М.: ВЦ РАН, 2012. 40 с.
8. *Соломатин А.Н.* Некоторые оптимизационные задачи для группы газовых месторождений. М.: ВЦ РАН, 2009. 44с.
9. *Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Скиба А.К.* Планирование разработки группы газовых месторождений с учетом неопределенности исходных данных // Экспозиция Нефть Газ, 2015, №2. С. 20-23.
10. *Хачатуров В.Р.* Математические методы регионального программирования. М.: Наука, 1989. 304 с.
11. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. Задачи и методы стохастического программирования / 3-е изд. М.: URSS, 2010. 399 с.

Благодарим за внимание!