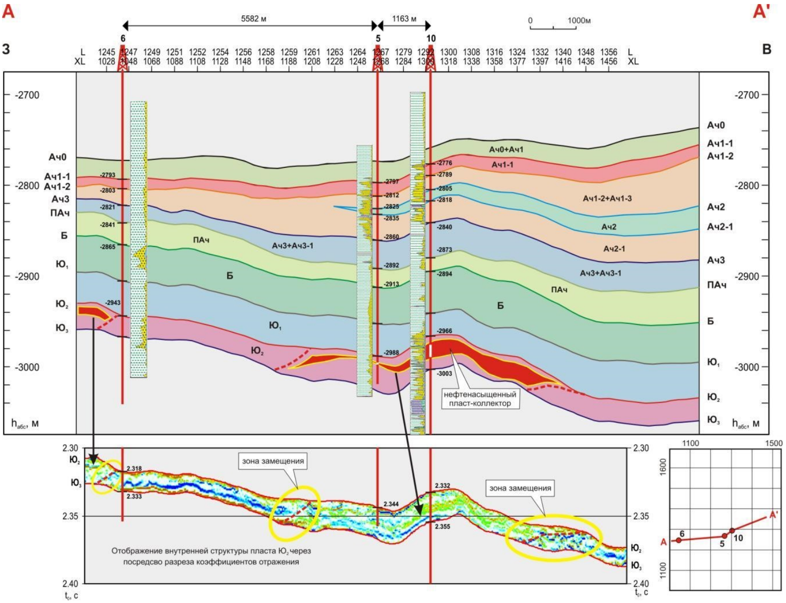
О построении изображений слоистых сред в обратных задачах рассеяния для волнового уравнения акустики

А. В. Баев

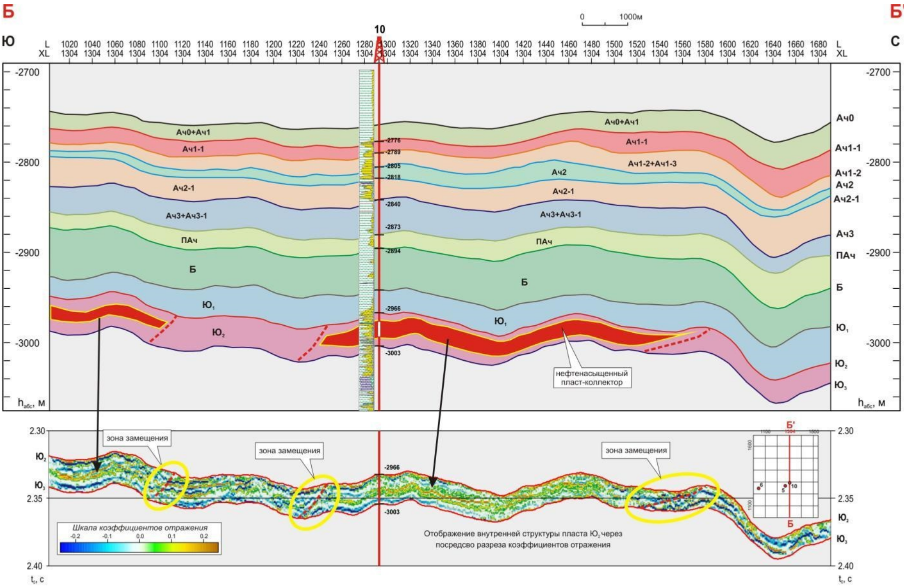
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Гальперинские чтения 2015

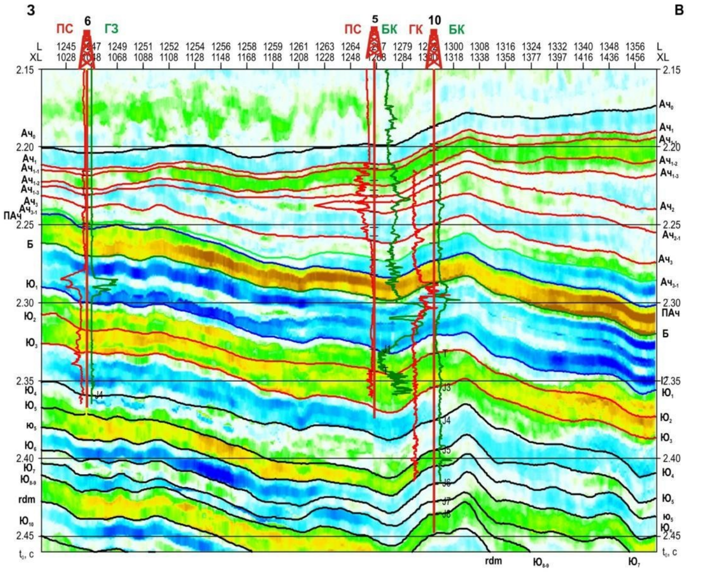
Сейсмологический разрез 1

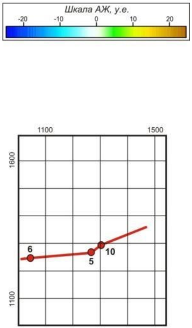


Сейсмологический разрез 2

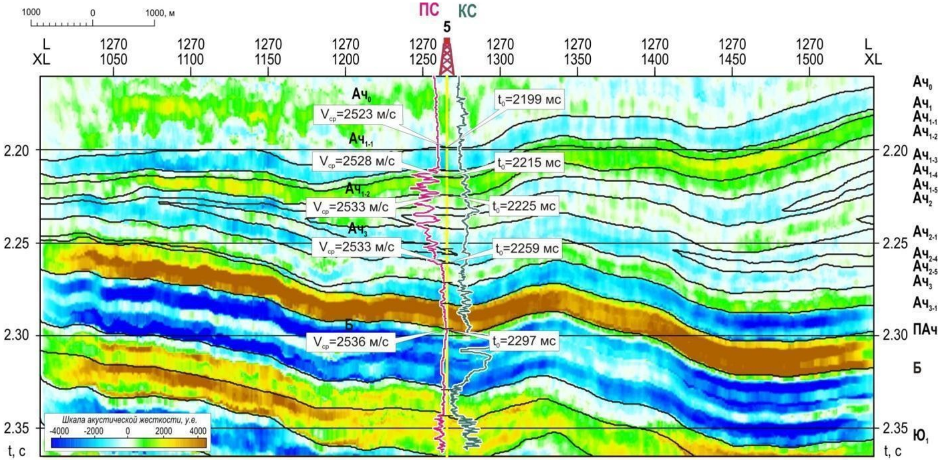


Разрез акустических жесткостей 1

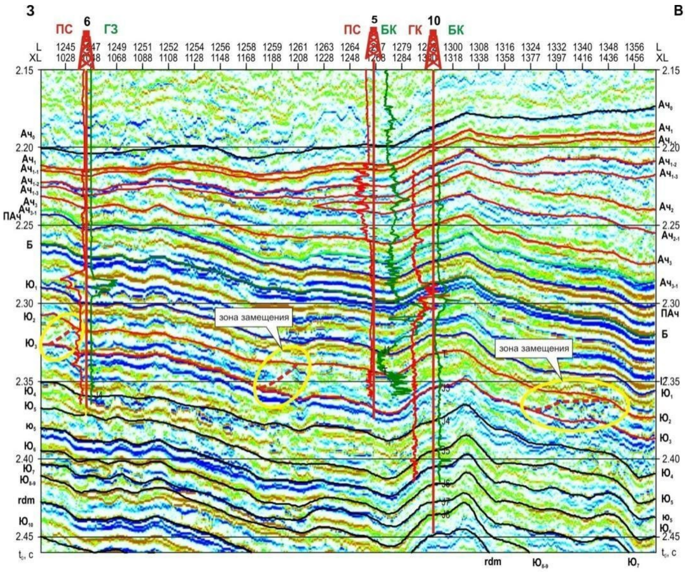


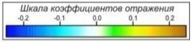


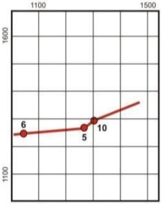
Разрез акустических жесткостей 2



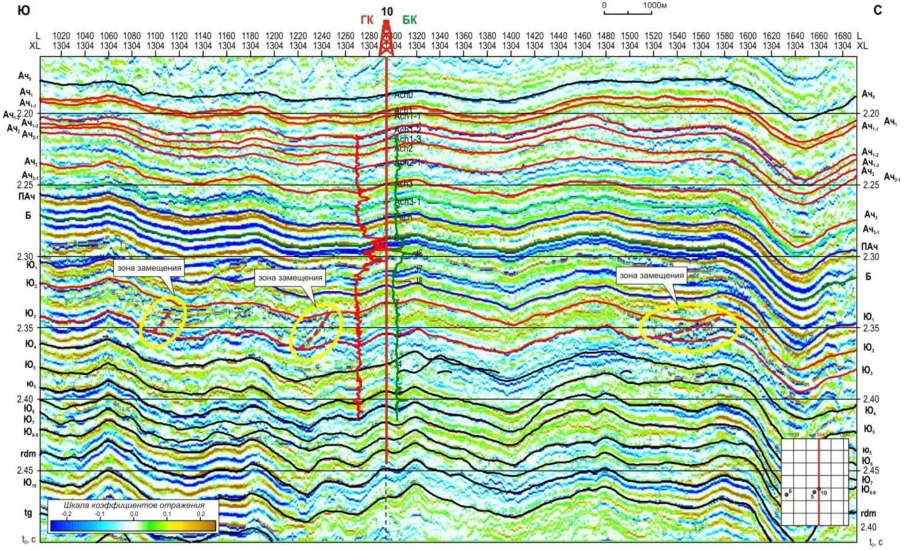
Разрез коэффициентов отражения 1



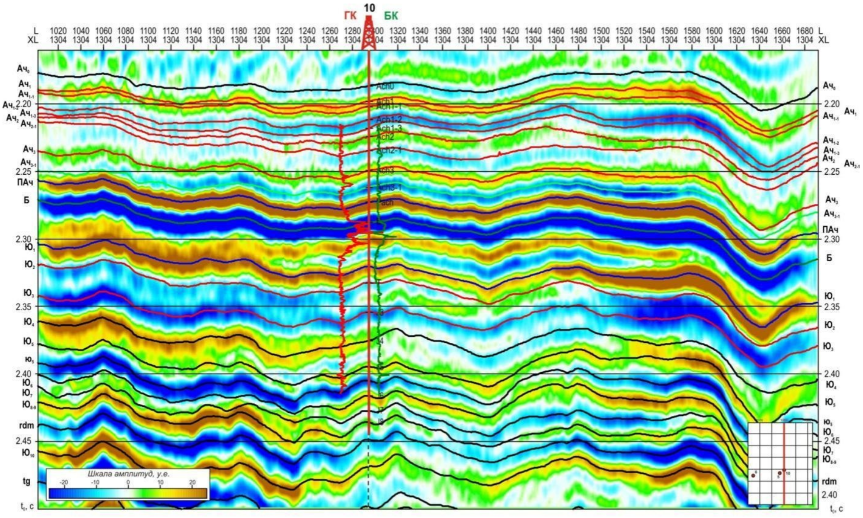




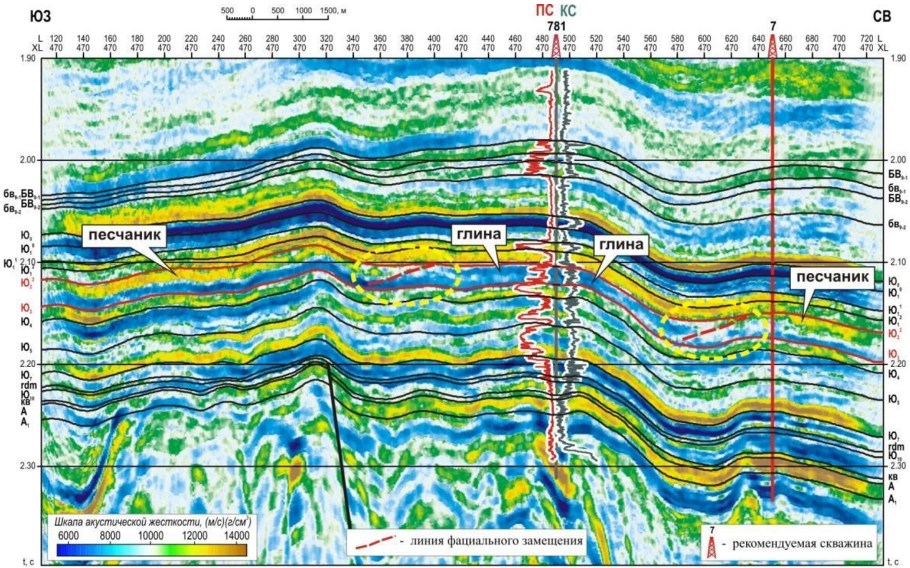
Разрез коэффициентов отражения 2



Временной разрез с интерпретацией акустических жесткостей и коэффициентов отражения



Фрагмент разреза акустических жесткостей



Математическая модель

Уравнения акустики

$$\rho(\mathbf{r})\mathbf{v}_t = -\nabla p, \quad p_t = -\rho(\mathbf{r})a^2(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$$

ρ — плотность, a — скорость, $\sigma = a\rho$ — акустическая жесткость

Волновое уравнение акустики

$$\boxed{p_{tt} = \rho(\mathbf{r})a^2(\mathbf{r}) \operatorname{div}(1/\rho(\mathbf{r}) \operatorname{grad} p)}$$

$p(\mathbf{r}, t)$ — флюктуация давления

Область $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2_+ = \{\xi, \eta \mid \xi > 0, \ -\infty < \eta < \infty\}$

известны $\boxed{\rho_0(\eta) = \rho(0, \eta), \ a_0(\eta) = a(0, \eta), \ \sigma_0(\eta) = a_0\rho_0}$

Уравнения геометрической оптики

Уравнение эйконала

$$\boxed{a^2(\xi,\eta)|\nabla x|^2 = 1, \quad x(0,\eta) = 0}$$

Уравнения геодезических

$$\boxed{y_\xi = -G(\xi,\eta)x_\eta, \quad y_\eta = G(\xi,\eta)x_\xi}$$

Уравнение переноса

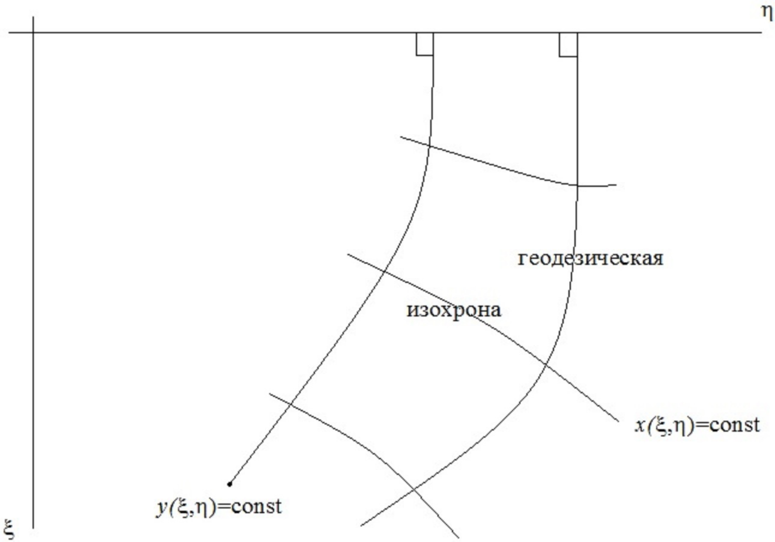
$$\boxed{\nabla G \nabla x + G\Delta x = 0, \quad G(0,\eta) = 1/\rho_0(\eta)}$$

$$(\xi,\eta) \to (x,y)$$

$$G.(x,y) = G(\xi(x,y),\eta(x,y)),\ \rho.(x,y) = \rho(\xi(x,y),\eta(x,y))$$

$$\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}\eta|_{\xi=0} = 1/\sigma_0(\eta), \quad \rho_0(\eta), a_0(\eta), \sigma_0(\eta) \Rightarrow \rho_1(y), a_1(y), \sigma_1(y)$$

Полугеодезические координаты



Волновое уравнение в полугеодезических координатах

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho . G . \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho . G .}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho . G . \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{G .}{\rho .}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$u(x, y, t) = p(\xi(x, y), \eta(x, y), t)$

$$\boxed{z\, u_{tt} = z\, u_{xx} + 2(z_x u_x + c z_y u_y) + z(c u_y)_y} \qquad (1)$$

$c = G .^2(x, y),\; z = 1/\sqrt{\rho .(x, y) G .(x, y)}$

Физический смысл коэффициентов

$$z \approx \sqrt{\sigma_1(y)/\sigma .(x, y)}, \quad G . \approx a .(x, y)/\sigma_1(y)$$

Задача построения изображений

Область $\mathbb{R}^{2+1}_{+} = \{\mathbf{s} = (x, y, t) \mid x > 0,\ -\infty < y < \infty,\ t > 0\}$

Задача рассеяния

$$u_{tt} = u_{xx} + 2/z(z_x u_x + c z_y u_y) + (c u_y)_y, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{2+1}_{+}$$

$$u_x(0, y, t) = -\varphi(y, t),\ u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) = 0$$

Обратная задача рассеяния

— по полю $\boxed{u(0, y, t) = f(y, t)}$

— построить временной разрез $\boxed{c(x, y),\ z(x, y)}$

Построение изображения среды

— по разрезу $\boxed{c(x, y),\ z(x, y)}$

— построить глубинный разрез $\boxed{\sigma(\xi, \eta),\ a(\xi, \eta)}$

Задача рассеяния в приближении Галёркина

$2L$ периодическая среда

Пусть $c(x,y)$, $z(x,y)$ и $\varphi(y,t)$ являются $2L$-периодическими по y:

$$\begin{bmatrix} c(x,y) \\ z(x,y) \\ \varphi(y,t) \end{bmatrix} = \sum_{|n|\le N} \begin{bmatrix} c_n(x) \\ z_n(x) \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix} \psi_n(y), \quad \psi_n(y) = \exp\{\mathrm{i}\mu_n y\}, \ \mu_n = \pi n/L$$

$$u_j(x,y,t) = \sum_{|n|\le N} u_{jn}(x,t)\,\psi_n(y), \quad u_{j,x}(0,y,t) = -\sum_{|n|\le N} \varphi_{jn}(t)\,\psi_n(y)$$

$$U = \|u_{jn}(x,t)\|, \quad \Phi = \|\varphi_{jn}(t)\|, \quad \Phi(0) = E, \quad M = \|\delta_{jn}\,\mu_n\|$$

$$C = \|c_{j-n}(x)\|, \quad Z = \|z_{j-n}(x)\|, \quad Z(0) = E, \quad |j,n| \le N$$

Прямая и обратная задачи рассеяния

Задача рассеяния для гиперболической системы

$$\boxed{\begin{array}{l} ZU_{tt} = ZU_{xx} + 2Z'U_x + [U, MCMZ], \;\; x, t > 0 \\ U(x,0) = U_t(x,0) = 0, \;\; U_x(0,t) = -\Phi(t), \;\; x, t \geq 0 \end{array}} \tag{2}$$

T-локальная постановка обратной задачи

по следу $U(0,t) = F(t)$, $t \in [0, 2T]$, решения задачи (2) определить непрерывные матрицы $C(x) > 0$, $Z(x) > 0$, $x \in [0, T]$

Теорема 1. *Решение обратной задачи рассеяния единственно при любом $T > 0$.*

Разрешимость обратной задачи

Интеграл энергии

$$0.5\left(\langle Z(V_t - V_x), Z(V_t - V_x)\rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle ZMV, CZMV\rangle_{L_2(\Gamma)}\right) =$$
$$-\langle V_t(0,t), V_x(0,t)\rangle_{L_2[0,2T]} \equiv \Pi,\ \ \Gamma = \{x, t \geq 0 \mid x + t = 2T\}$$

$\Pi = \Pi(\Phi) > 0$ — поток энергии на границе $x = 0$ для источника Φ

Критерий разрешимости обратной задачи

$$\boxed{\Pi_T = \inf_{\Phi} \{\, \Pi(\Phi) \mid \langle \Phi, \Phi\rangle_{L_2[0,2T]} = 1 \,\}}$$

Теорема 2. *Обратная задача рассеяния на отрезке* $[0, T]$ *разрешима в классе* $\{C \mid C(x) > 0\}$ *тогда и только тогда, когда* $\Pi_T > 0$*, при этом* $Z(x) > 0$*. Равенство* $\Pi_T = 0$ *имеет место, если и только если* $\det Z(T) = 0$*.*

Построение изображений среды

Ортогональность полугеодезических координат

$$\xi_x = G.(x,y)\eta_y, \quad \eta_x = -G.(x,y)\xi_y \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} (\xi_x/G.)_x + (\xi_y G.)_y = 0, & \xi(0,y) = 0, & \xi_x(0,y) = a_0(\eta(y)) \\ (\eta_x/G.)_x + (\eta_y G.)_y = 0, & \eta_x(0,y) = 0, & \eta_y(0,y) = \sigma_0(\eta(y)) \end{array}} \qquad (3)$$

Теорема 3. *Пусть* $G.(x,y) > 0$ *— решение обратной задачи рассеяния для уравнения (1) в* $D_T = [0,T] \times [-L,L]$. *Тогда начально-краевая* $2L$*-периодическая по* y *задача (3) определяет взаимно-однозначно отображение* $\mathbf{r}(x,y) = \{\xi(x,y), \eta(x,y)\}$, *где* $\eta(y) = g^{-1}(y)$, *а* $g(\eta) = \int_0^\eta \mathrm{d}\zeta/\sigma_0(\zeta)$. *Кроме того, на* $\mathbf{r}(D_T)$ *однозначно определены функции* $\rho(\xi,\eta)$ *и* $a(\xi,\eta)$ *такие, что* $\rho(0,\eta) = \rho_0(\eta)$, $a(0,\eta) = a_0(\eta)$.

Публикации

1. *Baev A.V.* On t-local solvability of inverse scattering problems in two dimensional layered media // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. V.55, №6, p.1033–1050

2. *Baev A.V.* On construction of images of layered media in inverse scattering problems for the wave equation of acoustics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2016. V.27, to be published