О разрешимости обратных задач рассеяния в неоднородных средах

А. В. Баев

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Гальперинские чтения 2014

Слоистые среды

Кусочно-постоянные среды

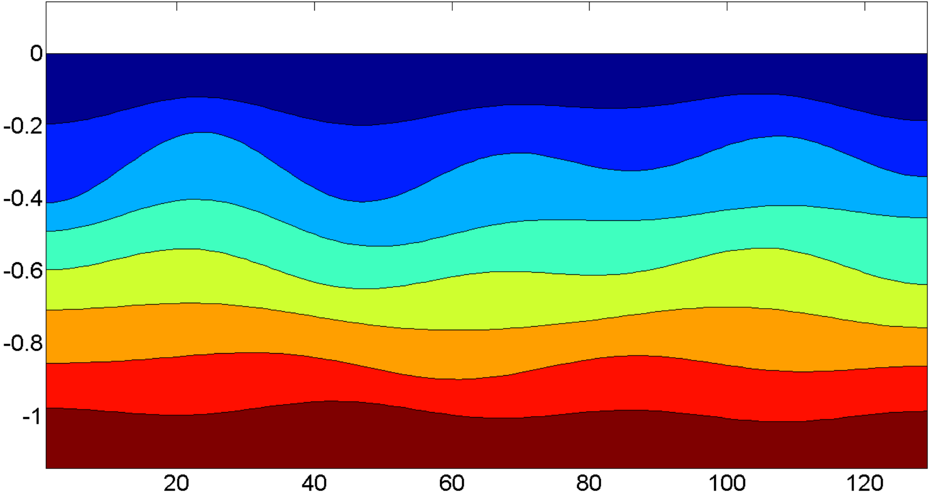


Рис. 1. Разрез слоистой кусочно-постоянной среды

Слоистые среды

Вертикально-неоднородные среды

Пусть $\rho_j, \lambda_j, \mu_j = \mathrm{const}$ при $z_j(x, y) \leq z \leq z_{j+1}(x, y)$, $j = 0, 1, \ldots$

границы раздела $z = z_j(x, y)$ — гладкие функции

$\mathbf{N}_j = \left\{ \frac{\partial z_j}{\partial x}, \frac{\partial z_j}{\partial y}, 1 \right\}$ — общее направление изменения ρ, λ, μ

Слоистые среды

Непрерывные неоднородные среды

Пусть $\rho(\mathbf{r}), \lambda(\mathbf{r}), \mu(\mathbf{r}) \in C^1(\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} = (x, y, z), z \geq z_0(x, y)\})$, и

$\nabla\rho, \nabla\lambda, \nabla\mu$ — коллинеарны, то есть

$$\det J = \begin{vmatrix} \rho_x & \rho_y & \rho_z \\ \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \end{vmatrix} = 0, \ \operatorname{rang} J = 1 \tag{1}$$

Слоистые вертикально-неоднородные непрерывные среды

Definition

Упругая среда называется слоистой вертикально-неоднородной, если выполнено условие (1) и существует постоянная $c > 0$ такая, что $\rho_z^2 \geq c\,(\rho_x^2 + \rho_y^2)$

Слоистые среды

Важные следствия

Рассмотрим $a(\mathbf{r}) = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $b(\mathbf{r}) = \sqrt{\mu/\rho}$, $\sigma(\mathbf{r}) = \sqrt{(\lambda + 2\mu)\rho}$

Corollary

Если упругая среда является слоистой вертикально-неоднородной, то $\{\rho(\mathbf{r}), a(\mathbf{r}), b(\mathbf{r})\}$ функционально зависимы, то есть существуют функции $a_0(\rho)$, $b_0(\rho)$ такие, что $a(\mathbf{r}) = a_0(\rho)$, $b(\mathbf{r}) = b_0(\rho)$, где $\rho = \rho(\mathbf{r})$

Таким образом, неизвестны $\rho(\mathbf{r})$, $a_0(\rho)$, $b_0(\rho)$ или $\sigma(\mathbf{r})$, $a_1(\sigma)$, $b_1(\sigma)$

Основные уравнения

Уравнение колебаний

$$\rho(z)U_{tt} = (\lambda(z)U_z)_z, \quad z > 0 \tag{2}$$

Уравнение в переменных время-эйконал

$$\tau(z) = \int_0^z 1/a(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \quad a(z) = \sqrt{\lambda/\rho}$$

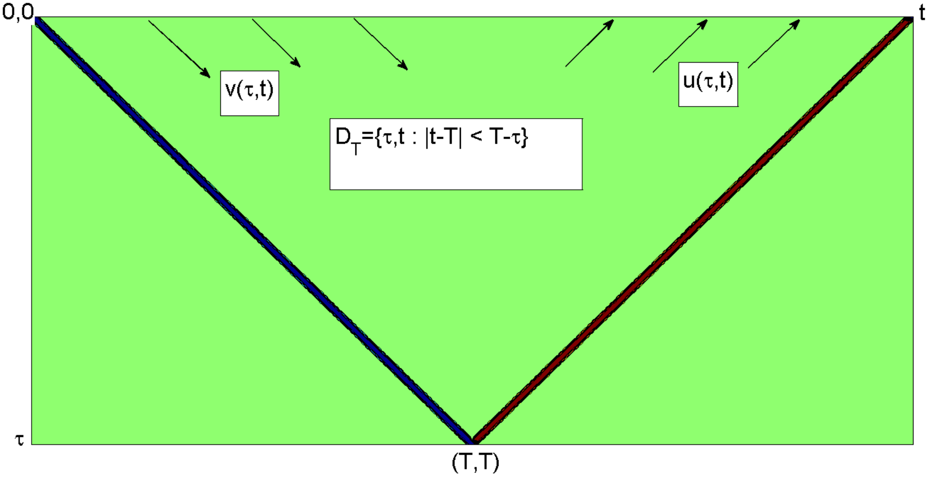
$$W_{tt} = W_{\tau\tau} + 2k(\tau)W_\tau, \quad \tau > 0 \tag{3}$$

$$k(\tau) = \sigma'/(2\sigma), \quad \sigma(\tau) = \sqrt{\lambda\rho}$$

Задача рассеяния

Система Дирака

$$v_t + v_\tau + k(\tau)u = 0, \quad u_t - u_\tau - k(\tau)v = 0, \quad \tau > 0 \tag{4}$$



Обратная задача для системы Дирака

Найти $k(\tau) \in C[0, T]$ по $f(t) \in C[0, 2T]$, где

$$f(t) = v(0, t) - u(0, t)$$

$\{v, u\}$ — решение (4) в $D = \{\tau, t \mid \tau, t > 0\}$ при

$$v(\tau, 0) = u(\tau, 0) = 0, \quad v(0, t) + u(0, t) = \delta(t)$$

Разрешимость обратной задачи

Уравнение Гельфанда-Левитана

$$Ag \equiv g(x,t) + \int_{-x}^{x} f(|t-\tau|)\, g(x,\tau)\, \mathrm{d}\tau = f(x+t) + f(|x-t|), \qquad (5)$$

$$|t| \leq x \leq T$$

Theorem

Обратная задача рассеяния для системы Дирака разрешима тогда и только тогда, когда уравнение (5) однозначно разрешимо при любом $x \in [0, T]$

Разрешимость обратной задачи

Положительная определённость оператора A

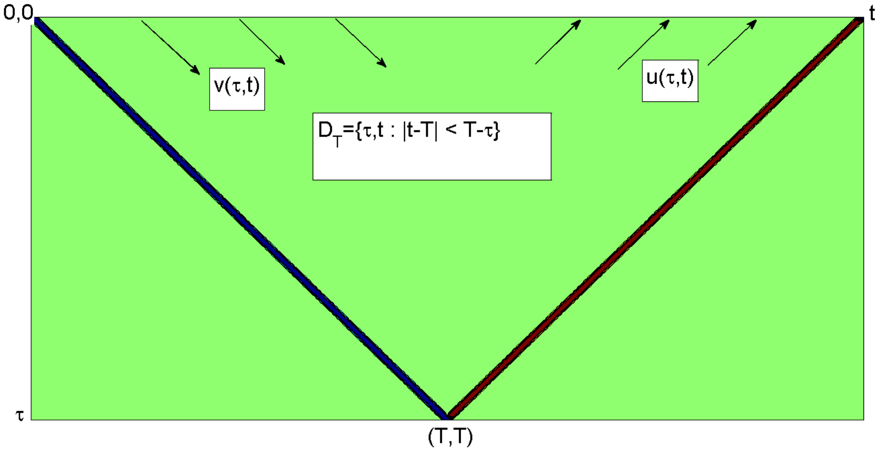
$$\int\limits_{-T}^{T} y^2(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-T}^{T} y(t) \int\limits_{-T}^{T} f(|t-\tau|)\,y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t > 0, \quad \forall\ y(t) \in L_2[-T, T]$$

Corollary

Обратная задача рассеяния для системы Дирака разрешима тогда и только тогда, когда оператор A положительно определён

Интеграл энергии

$$\iint\limits_{D_T} (\partial_t(v^2+u^2)+\partial_\tau(v^2-u^2))\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \oint\limits_{\partial D_T^+} -(v^2+u^2)\,\mathrm{d}\tau + (v^2+u^2)\,\mathrm{d}t$$



Основной результат

$$2\int_0^T v^2(\tau, 2T-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{2T} (v^2(0,t) - u^2(0,t))\,\mathrm{d}t = \Pi(\varphi) \tag{6}$$

$$v(0,t) + u(0,t) = \varphi(t), \quad \varphi \in C^1[0,2T]$$

Критерий разрешимости

$$\Pi_T = \inf_{\varphi} \{\Pi(\varphi) \mid \|\varphi\|_{L_2[0,2T]} = 1\} \tag{7}$$

Theorem (main)

Обратная задача рассеяния для системы Дирака разрешима тогда и только тогда, когда $\Pi_T > 0$

О построении изображений среды

Гипотеза 1 Для среды выполняется закон сохранения энергии

Процедура 1 Задается априорнный скоростной разрез

Процедура 2 Решается обратная задача рассеяния

Процедура 3 Строится изображение среды

Утверждение 1 Задача построения временного разреза разрешима