O1 К ПОСТАНОВКЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ В МЕТОДАХ ПРОФИЛИРОВАНИЯ

П.Н. Александров
(*ЦГЭМИ ИФЗ РАН, Троицк*)

ABOUT FORMULATION OF INVERSE PROBLEMS IN GEOPHYSICS PROFILING METHODS

Alexandrov P.N.
(*GEMRC IPE RAS, Troitsk*)

Аннотация. Рассматривается постановка обратных задач геофизики на примере электромагнитных методов профилирования. Показано, что для решения обратных задач необходимо находить операторы, которым удовлетворяют измеряемые в методах профилирования физические поля.

Absract. We consider the formulation of the inverse problems of geophysics at the example of electromagnetic profiling methods. It is shown that the solution of inverse problems to find operators that satisfy the measured profiling methods in the physical field.

К профилирующим методам относятся методы геофизики в которых расстояние между источником и приемником зафиксировано. Ярким примером являются методы геофизических исследований скважин (ГИС), в которых источник и приемник связаны в снаряде. Постановка обратных задач в этом случае наталкивается на следующую проблему, которую рассмотрим на примере электромагнитных методов профилирования.

Решение уравнений Максвелла

$$\begin{gathered} rot\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{ex} \\ rot\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \end{gathered} \qquad (1)$$

где $\mathbf{H},\mathbf{E}$ - напряжённости, соответственно, магнитного и электрического полей; $\mathbf{J}^{ex} = \mathbf{J}^{ex}(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ - плотность стороннего электрического тока; $\sigma = \sigma(x, y, z, \omega)$ - удельная электропроводность среды; $\mu = \mu(x, y, z, \omega)$ - магнитная проницаемость среды, ω - частота; i - мнимая единица, имеет следующий вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, x_0, y_0, z_0), \ \mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, x_0, y_0, z_0),$$

где (x, y, z) - координаты точки наблюдения, (x_0, y_0, z_0) - координаты точки источника.

В однородной среде электромагнитное поле зависит от разности координат источника и приемника

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \ \mathbf{E} = \mathbf{E}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \qquad (1a)$$

Если зафиксировать расстояние между источником и приемником, например, в виде

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x+1 \\
y_0 &= y-1 \qquad\qquad (1б) \\
z_0 &= z+2
\end{aligned}
$$

то компоненты электромагнитного поля будут постоянными величинами, не зависимыми от пространственных координат. Это означает, что любая производная по пространственным координатам будет равна нулю, т.е. поле не будет удовлетворять исходным уравнениям (1). Отсюда следует, что в найденном решении уравнений Максвелла (1) в предположении независимости координат источника и приемника, в последующем эти координаты связывать нельзя. В противном случае появляется противоречие - связав в решении уравнений (1) точку наблюдения и точку источника оказывается неизвестным уравнение, которому будет подчинятся измеряемое поле в методах профилирования.

Чтобы избежать этого противоречия необходимо прежде найти вид уравнения Максвелла при фиксировании расстояния между источником и приемников. С этой целью положим в уравнениях Максвелла (1) зависимость координат источника от координат приемника

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x_0(x,y,z) \\
y_0 &= y_0(x,y,z) \qquad\qquad (2) \\
z_0 &= z_0(x,y,z)
\end{aligned}
$$

(обратное также справедливо $x = x(x_0, y_0, z_0), y = y(x_0, y_0, z_0), z = z(x_0, y_0, z_0)$)

Тогда

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \mathbf{H}(x,y,z,x_0(x,y,z),y_0(x,y,z),z_0(x,y,z)) = \tilde{\mathbf{H}}(x,y,z)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \mathbf{E}(x,y,z,x_0(x,y,z),y_0(x,y,z),z_0(x,y,z)) = \tilde{\mathbf{E}}(x,y,z)$$

Поля с тильдой - это те поля которые измеряются в методах профилирования. Найдем уравнения, которым они подчиняются. Для этого, учитывая уравнения (1), найдем ротор магнитного $\tilde{\mathbf{H}}$ и электрического $\tilde{\mathbf{E}}$ поля. Рассматривая пространственные производные как производные сложной функции, получим

$$
\begin{aligned}
rot\tilde{\mathbf{H}} &= \sigma\tilde{\mathbf{E}} + rot_0\mathbf{H} \qquad\qquad (3) \\
rot\tilde{\mathbf{E}} &= -i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} + rot_0\mathbf{E}
\end{aligned}
$$

где

$$
rot_0\mathbf{H} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial x_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x_0}H_z + \frac{\partial y_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y_0}H_z + \frac{\partial z_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z_0}H_z - \frac{\partial x_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x_0}H_y - \frac{\partial y_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y_0}H_y - \frac{\partial z_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z_0}H_y \\
\frac{\partial x_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x_0}H_x + \frac{\partial y_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y_0}H_x + \frac{\partial z_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z_0}H_x - \frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_0}H_z - \frac{\partial y_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_0}H_z - \frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z_0}H_z \\
\frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_0}H_y + \frac{\partial y_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_0}H_y + \frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z_0}H_y - \frac{\partial x_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x_0}H_x - \frac{\partial y_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y_0}H_x - \frac{\partial z_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z_0}H_x
\end{pmatrix}
$$

$$
rot_0\mathbf{E} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial x_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x_0}E_z + \frac{\partial y_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y_0}E_z + \frac{\partial z_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z_0}E_z - \frac{\partial x_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x_0}E_y - \frac{\partial y_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y_0}E_y - \frac{\partial z_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z_0}E_y \\
\frac{\partial x_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x_0}E_x + \frac{\partial y_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y_0}E_x + \frac{\partial z_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z_0}E_x - \frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_0}E_z - \frac{\partial y_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_0}E_z - \frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z_0}E_z \\
\frac{\partial x_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_0}E_y + \frac{\partial y_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_0}E_y + \frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z_0}E_y - \frac{\partial x_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x_0}E_x - \frac{\partial y_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y_0}E_x - \frac{\partial z_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z_0}E_x
\end{pmatrix}
$$

Выражение rot_0 означает, что дифференцирование происходит по пространственной координате источника, включающее производные координат источника по координатам приемника. Заметим, что сторонний ток $\mathbf{J}^{ex}$ пропадает, если носители приемника и источника не пересекаются.

Таким образом, прежде чем найти решение уравнений (3) $\tilde{\mathbf{H}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ необходимо сначала найти решение уравнений (1), продифференцировать это решение по координате источника, подставить зависимость (2) в результат дифференцирования. В результате источниками полей $\tilde{\mathbf{H}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ являются распределенные в пространстве поля $rot_0\mathbf{H}$ и $rot_0\mathbf{E}$.

Рассмотрим пример. Для однородного пространства решение уравнений (1) имеет вид (1а). Найдем

$$rot_0\mathbf{H} = -rot\mathbf{H} = -\sigma\mathbf{E} - \mathbf{J}^{ex}$$

$$rot_0\mathbf{E} = -rot\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}$$

После подстановки (1б) в эти уравнения, получим

$$rot\tilde{\mathbf{H}} = \sigma\tilde{\mathbf{E}} + rot_0\mathbf{H} = \sigma\tilde{\mathbf{E}} - \sigma\mathbf{E} = \sigma\tilde{\mathbf{E}} - \sigma\tilde{\mathbf{E}} = 0$$

$$rot\tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} + rot_0\mathbf{E} = -i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} + i\omega\mu\mathbf{H} = -i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} + i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} = 0$$

Следовательно, $\tilde{\mathbf{H}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ - постоянные вектора по пространственным координатам, либо потенциальные поля. В силу произвольности типов источников (электрические и магнитные диполи), последнее невозможно.

Вывод. Постановка обратных задач в методах электромагнитного профилирования сводится к решению обратной задачи для двух систем уравнений (1) и (3). Данная проблема присуща и сейсмическим профилирующим методам, в частности, для акустического каротажа скважин, где источник и приемник находятся на строго фиксированном расстоянии.