O1 О расщеплении годографа в диспергирующих средах.

П.Н. Александров
(ЦГЭМИ ИФЗ РАН, Троицк)

On Hodograph Curve Cleavage in Dispersive Media

Alexandrov P.N.
(GEMRC IPE RAS, Troitsk)

Аннотация. В работе рассматривается вывод уравнения для времени прихода волны в точку наблюдения для диспергирующей однородной среды. Показано, что в случае зависимости физических параметров от временной частоты происходит расщепление годографа, который описываются уравнениями, являющиеся частными случаями уравнения Рикатти.

Absract. The paper examines the development of a equation for wave arrival time at observation point in a dispersive homogeneous medium. It shows that where physical parameters depend on time frequency, the traveltime curve splits and is described by equations that are special cases of Riccatti's equation.

В работе [1] приведено графическое изображение решения телеграфного уравнения

$$\nabla^2 f - a\frac{\partial}{\partial t} f - b\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0\,. \qquad (1)$$

для однородной изотропной среды, которое визуально создает эффект расщепления годографа. Для объяснения этого эффекта получим уравнение годографа используя подход, изложенный в работе [2]. Зафиксируем амплитуду сигнала $f(x,y,z,t) = const(x,y,z,t)$, где пространственные координаты x, y, z - координаты точки наблюдения в декартовой системе координат, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, t - время. Рассматривая последнее уравнение как неявно заданную функцию, можно определить зависимость $t = t(x,y,z)$ [3]. Введем новую функцию $\tilde{f} = f(x,y,z,t(x,y,z)) = \tilde{f}(x,y,z)$. В этом случае любая производная по пространственным координатам и времени будет равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z,t(x,y,z)) + \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,z,t(x,y,z))\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\tilde{f} = 0 = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} f(x,y,z,t(x,y,z)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,y,z,t(x,y,z))\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{f}=0=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y,z,t(x,y,z))+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}f(x,y,z,t(x,y,z))\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial x}+$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t(x,y,z))(\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial x})^2+\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,t(x,y,z))\frac{\partial^2 t(x,y,z)}{\partial x^2}$$

Учитывая второе уравнение можно записать

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y,z,t(x,y,z))-\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t(x,y,z))(\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial x})^2+\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,t(x,y,z))\frac{\partial^2 t(x,y,z)}{\partial x^2}=0$$

Аналогично получим для производных по оставшимся пространственным координатам

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y,z,t(x,y,z))-\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t(x,y,z))(\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial y})^2+\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,t(x,y,z))\frac{\partial^2 t(x,y,z)}{\partial y^2}=0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(x,y,z,t(x,y,z))-\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t(x,y,z))(\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial z})^2+\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,t(x,y,z))\frac{\partial^2 t(x,y,z)}{\partial z^2}=0$$

После суммирования полученных выражений получим

$$\nabla^2 f(x,y,z,t(x,y,z))-\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,y,z,t(x,y,z))(gradt)^2+\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,t(x,y,z))\nabla^2 t=0$$

С учетом телеграфного уравнения (1) окончательно получим

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}f\{(gradt)^2-b\}+\frac{\partial}{\partial t}f\{\nabla^2 t+a\}=0$$

Данное уравнение будет всегда выполняться при условии

$(gradt)^2=b$ и $\nabla^2 t=divgradt=-a$.

Решение последнего уравнения является отрицательная функция вида $t=-aR^2\frac{1}{6}$. Это является противоречием с представлениями о годографе (времени прихода волны) как положительной функции пространственных координат. В связи с этим умножим исходное уравнение (1) на $e^{\frac{a}{b}t}$, тогда получим $\nabla^2 f^*+a\frac{\partial}{\partial t}f^*-b\frac{\partial^2}{\partial t^2}f^*=0$, где $f^*=e^{\frac{a}{b}t}f$.

С формальной точки зрения это позволяет провести изолинии на всем интервале изменений пространственной координаты и времени. В противном случае, годограф будет иметь вид петли и иметь ограниченный носитель по пространственным координатам, что противоречит представлениям о годографе для однородной изотропной среды. Тогда уравнение диффузионной части годографа примет вид $\nabla^2 t=a$ и решение будет иметь вид $t=aR^2\frac{1}{6}$. Рассмотри задачу электродинамики. В этом случае коэффициенты имеют вид $a=\sigma\mu$, $b=\varepsilon\mu$, где σ - удельная электропроводность, ε - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость.

Из условия не превышения скорости света в данной среде следует, что волна не может распространяться быстрее этой скорости света.

Следовательно, решение уравнения Пуассона $t_p = \mu\sigma\frac{R^2}{6}$ подчинено решению уравнению эйконала $t_e = \sqrt{\mu\varepsilon}R$ и должно выполняться условие $t_p \geq t_e$. Точка, в которой одновременно будут существовать две волны, найдем из условия $t_e = t_p = t_0$. Тогда $\sqrt{\varepsilon\mu}R_0 = \sigma\mu\frac{R_0^{\ 2}}{6}$ и отсюда $R_0 = 6\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu\sigma^2}}$, $t_0 = 6\frac{\varepsilon}{\sigma}$.

После этой точки возможно существование двух волн, т.е. происходит расщепление годографа. Рассмотрим пример из книги [1]. Для $\varepsilon = \frac{1}{36\pi}10^{-9}$, $\mu = 4\pi 10^{-7}$ и $\sigma = 10^{-3}$ получим

$$R_0 = 6\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu\sigma^2}} = 6\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi 4\pi 10^{-7}10^{-6}}} = \frac{1}{2\pi}10^2.$$

Отсюда время прихода обоих волн

$$t_e = t_p = t_0 = \sqrt{\varepsilon\mu}R_0 = 6\sqrt{\frac{1}{36\pi}10^{-9}4\pi 10^{-7}}\,\frac{1}{2\pi}10^2 = \frac{10^{-6}}{3\pi}.$$

Уравнение годографа в частотной области. Пусть поле g, являющемся преобразованием Фурье от функции f^*, подчиняется уравнению Гельмгольца $\nabla^2 g - k^2 g = -F$, $k^2 = i\omega\mu\sigma + (i\omega)^2\mu\varepsilon$, где $\sigma = \sigma(\omega)$, $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$ - рассматриваются как функции частоты ω, $F = F(\omega)$ - источники поля. Представим поле в виде интеграла Фурье и зафиксируем амплитуду $f^*(x,y,z,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y,z,\omega)e^{i\omega t}d\omega = const(x,y,z,t)$. В этом случае любая производная по независимым переменным будет равна нулю. Данное представление задает неявную функцию, позволяющее выразить время в зависимости от пространственных координат (уравнение годографа) $t = t(x,y,z)$. Введем новую постоянную функцию $\tilde{f} = \tilde{f}(x,y,z) = f^*(x,y,z,t(x,y,z))$. Используя изложенный выше подход получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(k^2 - (i\omega)^2\{(\frac{\partial t}{\partial x})^2 + (\frac{\partial t}{\partial y})^2 + (\frac{\partial t}{\partial z})^2\} + (i\omega)\nabla^2 t)\bar{g}e^{i\omega t(x,y,z)}d\omega = 0$$

или

$$k^2 - \frac{F}{\bar{g}} - (i\omega)^2\{(\frac{\partial t}{\partial x})^2 + (\frac{\partial t}{\partial y})^2 + (\frac{\partial t}{\partial z})^2\} + (i\omega)\nabla^2 t = 0$$

Полагая частоту комплексной величиной $\omega = \omega_R + i\omega_I$ и учитывая, что по определению время t действительная величина, то, разделяя полученное уравнение на действительную и мнимую части, получим два уравнения вне источников

$$(\frac{\partial t}{\partial x})^2 + (\frac{\partial t}{\partial y})^2 + (\frac{\partial t}{\partial z})^2 = \frac{1}{{\omega_I}^2 + {\omega_R}^2}[\frac{\omega_I}{\omega_R}\operatorname{Im}(k^2) - \operatorname{Re}(k^2)]$$

$$\nabla^{\square} t = -\frac{{\omega_I}^{\square} - {\omega_R}^{\square}}{\omega_R({\omega_I}^{\square} + {\omega_R}^{\square})}(-\operatorname{Im}(k^{\square}) + \frac{\omega_R a}{({\omega_I}^{\square} - {\omega_R}^{\square})}\omega_I \operatorname{Re}(k\ \ ))$$

Как следует из этих уравнений, в общем случае годограф зависит от частоты, которая входит в уравнения как параметр. Характер зависимости годографа от частоты определяется дисперсионными свойствами среды.

В частном случае недиспергирующей среды, полагая $\omega_I = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, получим

$$(gradt)^2 = \mu\varepsilon \text{ и } \nabla^2 t = divgradt = \mu\sigma$$

Литература

1. Светов Б.С. Основы геоэлектрики. 2008. - 656с.

2. Александров П.Н. Вывод уравнения эйконала для анизотропных неоднородных сред. Десятая Юбилейная к 90-летию Е.И. Гальперина международная Ежегодная Конференция «Гальперинские чтения-2010», Москва, 2010 - с.53-59.

3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 425с.