O1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНЫХ ВОЛН В ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕДАХ

А.В. Баев
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)

MATHEMATICAL SIMULATION OF SCALAR WAVE SCATTERING IN FRACTURED MEDIA

A.V. Baev
(Lomonosov Moscow State University)

Аннотация. Рассмотрены вопросы, связанные с моделированием скалярных волн в трещиноватых средах. Предложена математическая модель самосогласованного поля, описывающая как возникновение рассеянного поля, так и ослабление падающего поля. Для полного поля получено волновое уравнение с комплексной скоростью и исследовано соответствующее дисперсионное уравнение. Установлен закон частотно-зависимого затухания поля и закон изменения энергии. Рассмотрены начальная и краевые задачи для волн в трещиноватой среде. Построена разностная схема для начальной задачи и получено необходимое условие её устойчивости. Приведены результаты численного моделирования.

Abstract. The simulation of scalar waves in fractured media is considered. A self-consistent field model is proposed that describes the formation of a scattered field and the attenuation of the incident field. For the total field, a wave equation with a complex velocity is derived and the corresponding dispersion equation is studied. A frequency-dependent field damping law and an energy variation law are established. An initial and a boundary value problem for waves in a fractured medium is addressed. A finite-difference scheme for the initial value problem is constructed, and a condition for its stability is established. Numerical results are presented.

Введение. Затухание акустических волн в гетерогенных средах во многом определяется рассеянием на мелких (по сравнению с длиной волны) неоднородностях. Однако до сих пор не известен механизм рассеяния, определяющий наблюдаемые в гетерогенных средах зависимости коэффициента затухания от частоты.

Покажем на простейшем примере распространения плоской волны, что затухание, обусловленное трением, не соответствует экспериментальным данным, полученным для горных пород и на физических моделях. Воспользуемся для давления p и скорости v продольного смещения частиц среды системой уравнений акустики, учитывающих как внешнее трение, так и вязкость среды:

$$\rho v_t = -p_x - 2\rho\sigma v, \qquad p_t = -\rho c^2 v_x - 2\rho\mu v_{xt},$$

где ρ — плотность, c — скорость звука, σ — кинематический коэффициент, характеризующий внешнее трение, μ — кинематический коэффициент вязкого трения.

Из условия равенства характеристического определителя этой системы нулю приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$c^2k^2 = \omega^2 - 2i\omega(\sigma + \mu\omega^2/c^2),$$

откуда при условии волнового характера распространения колебаний получаем следующую зависимость волнового числа k от частоты ω: $ck\omega = \pm(\omega - i(\sigma + \mu\omega^2/c^2))$. Отсюда следует, что звуковая волна вида $\exp i(\omega t - kx)$ затухает при $x \to +\infty$ как $\exp\{-(\sigma + \mu\omega^2/c^2)x/c\}$.

Заметим, что рассмотрение более общей ситуации, т. е. переход в пространственном случае к системе уравнений Ламэ для упругого тела или уравнениям Навье-Стокса для жидкости, принципиально не изменяет полученной закономерности, а именно, затухание является частотно-независимым или слабо зависящим от частоты при указанных условиях. Как отмечено в [1–2], учёт диссипативных эффектов в рамках модели Био для трещиноватых и пористых сред также не приводит к результатам, удовлетворительно объясняющим частотно-зависимый характер затухания объёмных волн.

Другой причиной, вызывающей диссипацию энергии падающей волны, является рассеяние волн на мелких неоднородностях. Такими неоднородностями могут быть как полые, так и жёсткие трещины. Эксперименты показывают, что основную роль в рассеянии играют полые трещины как наиболее контрастные. В обоих случаях амплитуда рассеянного поля пропорциональна ω^2. Учёт энергетических потерь приводит к затуханию звуковой волны при $x \to +\infty$ как $\exp\{-\gamma\omega^4 x c\}$, что не согласуется с известными экспериментальными данными.

1. Математическая модель рассеяния. В основу изучаемых в работе моделей рассеяния звуковых волн в трещиноватых средах положены классические решения задач об излучении и рассеянии звука тонким диском конечного объёма. Построим математическую модель, не только учитывающую процесс излучения-рассеяния волн в трещиноватой среде, но также объясняющую указанный эффект частотно-зависимого ослабления поля. Падающее волновое поле характеризуется давлением *p*. Как правило, поле p является первичным. Когда p-волна проходит через среду, она рассеивается на трещинах, при этом возникает рассеянное поле s, определяющее энергетические потери в среде. С течением времени поле p теряет энергию за счёт её перекачки в энергию рассеянного поля.

Пусть в среде присутствуют рассеиватели, создающие за счёт поля p рассеянное поле s. Если плотность и размер рассеивателей малы, то $|s| \ll |$

$p|$, и кратными рассеяниями можно пренебречь. Рассмотрим ту же среду без рассеивателей, но сохраним в ней поле s как внешнее. Очевидно, что при этом для поля p справедливо волновое уравнение, содержащее s в качестве источника. В то же время поле p является возбуждающим для поля s. Пара $\{p,s\}$ образует, так называемое, самосогласованное поле. Такое рассмотрение приводит к следующей системе уравнений:

$$s_{tt}=c2r\Delta s-c2rvr\Delta p, \quad p_{tt}=c2r\Delta p+c2r\Delta s. \tag{1}$$

Если $v(r)$ — достаточно гладкая и медленно меняющаяся (в масштабе длины волны) функция, то эту систему можно записать в виде

$$w_{tt}=c2(r)1-i\nu(r)2\Delta w, \tag{2}$$

где $w=p+is$ — комплексное поле. Ниже будет показано, что из этой комплексной модели поля вытекает частотно-зависимое ослабление p-волны по закону, который соответствует экспериментальным данным.

2. Дисперсия волн. Рассмотрим распространение плоской волны в однородной трещиноватой среде. Для простоты изложения полагаем, что волна распространяется в направлении оси x, совпадающей с нормалью к трещинам. Для бегущей волны вида $\exp\{i(\omega t-kx)\}$ из системы (1) вытекает следующее условие существования такого решения (c, $v=const$):

$$\det=\omega2-c2k2-2\nu\omega22\nu\omega2\omega2-c2k2=0.$$

Это дисперсионное уравнение имеет четыре комплексных корня

$$ck=\pm\omega1\pm2i\nu=\pm\omega1\pm i\nu+O\nu2.$$

Решение системы (1) для гармонической волны при этом представляется вектор-столбцом вида

$$p,s=A\omega\exp\pm i\omega t-x/c\pm v\omega x/c.$$

Важное свойство этого решения состоит в том, что имеется волна, затухающая как $\exp\{-v\omega x/c\}$, когда $x\to\pm\infty$. Коэффициент затухания этой волны оказывается пропорциональным первой степени частоты, что наблюдается для объёмных волн в геологических породах и на физических моделях. В то же время могут существовать решения, приводящие к экспоненциальному росту амплитуды волны. Такие решения лишены физического смысла и исключаются из рассмотрения с помощью дополнительных условий при $x\to\pm\infty$ или $t\to\infty$.

3. Начальная задача Дирихле. Постановка начальной задачи для уравнения (1) в области $t>0$ подразумевает наложение условий при $t=0$. Из анализа общего решения следует, что при $t=0$ можно задать одну комплекснозначную функцию

$$wx,0=\varphi x+i\psi x, \quad \infty<x<\infty.$$

Это условие аналогично условию Дирихле для уравнения Лапласа. Вторым условием в задаче является ограниченность решения в верхней полуплоскости, т. е. при $t>0$ Условие ограниченности решения обеспечивает его единственность. Таким образом, поставленная задача является задачей Дирихле.

Рассмотрим численное моделирование процесса распространения волн в трещиноватой среде в рамках начальной задачи Дирихле. Как было установлено, соответствующая задача Коши является некорректной в силу неустойчивости. С другой стороны, при малых ν уравнение (2) обладает рядом свойств, характерных для гиперболических уравнений, в частности, существованием решений типа бегущих волн и дисперсией волн. Поэтому в работе за основу численного метода решения взята явная трёхслойная разностная схема (РС) для решения задачи Коши для волнового уравнения, в которой выполнены условия аппроксимации и устойчивости при ν.

Поскольку РС решает неустойчивую задачу Коши, то необходимо использовать процедуру выделения устойчивого, в данном случае, ограниченного при $t\to\infty$ решения. Одним из широко используемых для этого подходов является аналитическое выделение ограниченного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения после разделения переменных. Поскольку для задачи распространения волн в трещиноватых средах такой подход возможен лишь в случае $v=const$, в работе для получения устойчивого решения использован метод регуляризации РС.

В качестве регуляризирующего функционала выбран функционал вида:

$$\Phi w=wtt\text{-}c21\text{-}i\nu 2wxx2+\alpha wt2, \qquad (3)$$

где $\alpha>0$ — параметр регуляризации. Решение исходной задачи для уравнения (2) сводится к минимизации функционала (3) по w при выполнении начальных условий. Доказано, что задача минимизации устойчива при условии согласовании параметра α с параметрами сетки и величиной ν:

$$\alpha>8\nu c\tau h.$$

В заключение остановимся на результатах численного моделирования. В работе не затрагиваются вопросы вычислительного характера, как то, анализ погрешностей результатов, зависимость от параметров РС и т. д., обсуждается, в основном, качественная сторона вопроса. Все вычисления по РС производятся в комплексных числах — функции p и s вычисляются одновременно. Входящие в задачу параметры специально выбраны в размерных единицах, соответствующих реальным геофизическим данным.

Литература

1. *Баев А.В., Куценко Н.В., Файзуллин И.С.* О затухании и рассеянии сейсмических волн в трещиноватых средах. Геофизика. 2007. № 2. С. 16–20.

2. *Баев А.В.* Математическое моделирование рассеяния акустических волн в трещиноватых средах. Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52, № 9 С. 1676–1693.