

# **Исследование влияния рельефа на параметры сейсмического волнового поля методом конечных элементов**

Алешин А.С., Малышев Р.В.

(Институт физики Земли РАН им. О. Ю. Шмидта)

## **Research influence of topography on parameters of seismic wave field by finite-element method.**

Aleshin A.S., Malishev R. V.

### **Аннотация.**

Вопрос о влиянии рельефа на параметры сейсмического волнового поля имеет давнюю историю, но, к сожалению, выяснен не до конца. Начало отечественных исследований по этому вопросу принадлежит, по-видимому, С.В. Пучкову. Можно также упомянуть работу, где экспериментально исследовалось влияние рельефа на параметры сейсмического волнового поля – амплитуду и спектральный состав колебаний.

В данной работе рассматривается применение метода конечных элементов для решения прямой задачи распространения упругих волн.

Математически моделирование распространения сейсмических (упругих) волн, в линейном случае, представляется в виде решения уравнения Ляме. Для решения задачи был использован вариационный метод.

В результате моделирования были получены графики, которые показывают смещения частиц среды в различных точках поверхности рельефа. Получена оценка прироста бальности.

### **Abstract.**

The question about influence of topography on parameters of seismic wave field have a long history, but, unfortunately, this question is not fully studied. The first study of this question belongs to S. V. Puchkov. We may also mention the work, where were researched influence of topography on parameters of seismic wave field — amplitudes and spectrum.

In this article we considered the application of finite element method for solving linear equation of elastic wave propagation.

Math modeling of elastic wave propagation, in the linear case, is represented by system Lamé's equation. Variation method was used to solve the problem.

After the simulation graphs were obtained, which view displacement of particles of ground in different points of the surface. The estimation of magnitude amplification was given.

**Постановка задачи.** Вопрос о влиянии рельефа на параметры сейсмического волнового поля имеет давнюю историю, но, к сожалению, выяснен не до конца. Начало отечественных исследований по этому вопросу принадлежит, по-видимому, С.В. Пучкову [1]. Далее следует упомянуть работу [2], где экспериментально исследовалось влияние рельефа на параметры сейсмического волнового поля – амплитуду и спектральный состав колебаний. К сожалению, ни аппаратура, ни методика эксперимента не позволяют сделать определенных выводов по результатам этой работы. Затем следует упомянуть модельное исследование влияния рельефа на параметры волнового поля [3], где опять же были сделаны весьма неопределенные выводы: в ряде случаев амплитуды увеличивались, а иногда, наоборот, уменьшались.

Результатом неопределенности выводов относительно влияния рельефа на параметры сейсмического волнового поля стали рекомендации [4], где для выяснения указанного влияния предписывалось проведение инструментальных наблюдений на участках со сложным характером рельефа. Наконец, совсем недавно была опубликована статья [5], в которой методом конечных элементов был исследовано влияние рельефа на параметры сейсмических колебаний. К сожалению, и в этой работе имеется много неточностей, недомолвок и т.п., что снижает доверие к полученным результатам и делает невозможным их корректную проверку. Подробный анализ работы [5] не входит в нашу задачу, и потому отметим только ее самые явные недостатки.

- 1) Отсутствуют сведения о поглощении возбужденных колебаний на границах модели. При этом, что толщина модели в плоской части (вне возвышенности) составляет лишь 15 м (в масштабе модели), можно предположить существенное влияние многократных отражений на верхней и нижней сторонах модели.
- 2) То же можно отметить относительно влияния боковых границ модели, не указано, как авторы уменьшали это влияние. Если не принять необходимых мер по уменьшению влияния боковых границ, волновая картина будет засеяна боковыми волнами, что делает невозможным получение корректных результатов моделирования.
- 3) На приводимых в статье [5] сейсмограммах (рис.1в) помимо амплитудных изменений заметно резкое различие в спектральном составе колебаний в разных точках наблюдений, что никак не объясняется и даже не обсуждается в статье.
- 4) В статье указывается, что осуществляется возбуждение SH-волны. Неясно тогда каким образом возникают колебания P-волн.
- 5) В статье не приведен вид инструментальной акселерограммы, что не позволяет оценить качество приводимых сейсмограмм (рис.1в).

Словом результаты работы [5] не только не проясняют вопрос о влиянии рельефа на параметры сейсмических колебаний, но и вконец запутывают его.

Сказанное делает актуальным постановку и решение задачи о влиянии рельефа на параметры сейсмических колебаний методом конечных элементов.

**Общие сведения о методе конечных элементов.** Метод возник из [строительной механики](#) и [теории упругости](#), а уже затем было получено его математическое обоснование. Его можно рассматривать как один из вариантов распространённого в строительной механике [метода Рэлея—Ритца](#), который путём минимизации потенциальной энергии сводит задачу к системе линейных уравнений равновесия. Если не удастся составить вариационное уравнение для задачи, тогда можно использовать метод Галеркина вместе с конечными элементами.

Сейчас МКЭ — это популярный метод для решения инженерных задач в произвольных областях, поскольку аналитические решения либо не существуют, либо крайне сложны даже для простых областей. Основная задумка метода — это разделение сложных областей на простые подобласти. Искомые функции аппроксимируются в пределах каждой подобласти полиномами так, что коэффициенты аппроксимирующих полиномов выражаются через значения искомых функций в конечном числе узловых точек подобласти. Подобласть с выбранными узловыми точками называется конечным элементом.

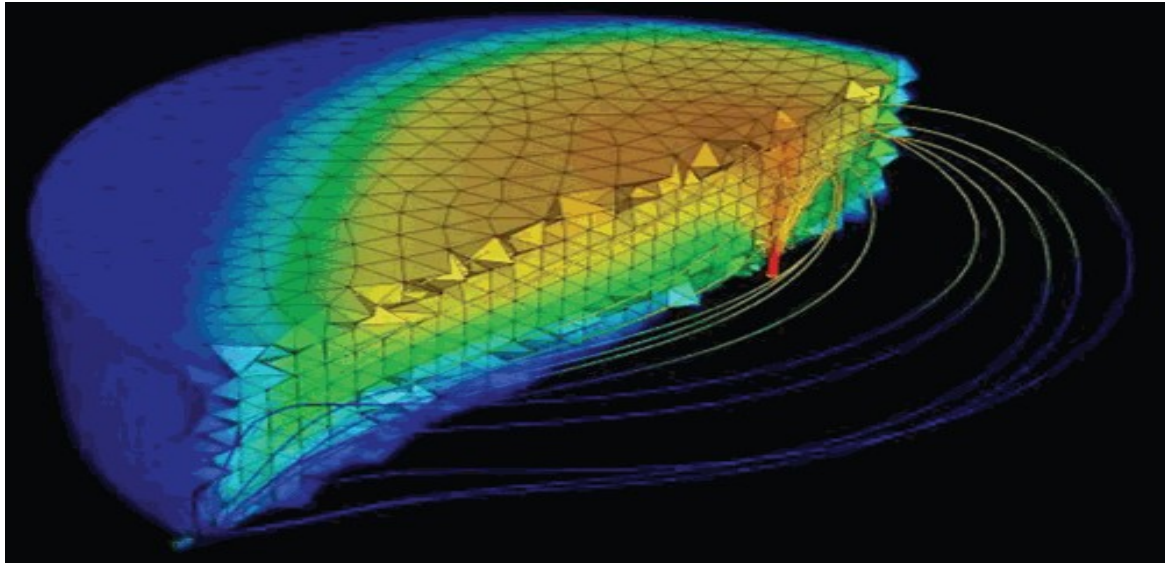


Рис. 1 Разбиение области на конечные элементы.

Силовое взаимодействие между конечными элементами осуществляется только в узловых точках. Определение искомых функций в узлах сетки конечных элементов является, по существу, решением задачи. Принятые для искомых функций аппроксимации сводят задачу о нахождении условий стационарности соответствующего функционала к задаче об экстремуме функции многих переменных. Условия экстремума такой функции представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в узлах, которая, по сути, является системой разрешающих уравнений МКЭ.

С развитием вычислительных средств возможности метода постоянно расширяются, как и класс решаемых задач. Сейчас этим методом моделируются электро-магнитные поля, поле деформаций в твердых телах, гидродинамические процессы, эволюционные задачи и многие другие. Также, намечается новая тенденция — расчет задач МКЭ средствами современных графических адаптеров (например, технология CUDA от NVIDIA), получая при хорошей оптимизации колоссальный прирост в скорости решения до 120 раз.

**Математическая постановка задачи.** Математически моделирование распространения сейсмических (упругих) волн, в линейном случае, представляется в виде решения уравнения Ляме:

$$(\gamma + \mu) \operatorname{grad} \theta + \mu \overline{\Delta \vec{U}} = \rho \frac{d^2 \vec{U}}{dt^2}$$

где  $\vec{U}$  - смещение частиц среды,  $\theta = \operatorname{div} \vec{U}$ ,  $\Delta$  - оператор Лапласа;  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $\rho$  - параметры среды.

С точки зрения применения "метода конечных элементов" - для решения задачи необходимо составить вариационную задачу, либо получить соотношения в форме Галеркина. Для решения задачи был использован вариационный метод - метод виртуальных перемещений.

В методе конечных элементов исследуемая область разбивается на дискретные элементы, которыми могут быть как простые (симплекс) элементы, так и более сложные. К простым в двумерном случае относятся треугольные элементы. В данной работе использовались простые треугольные элементы, использующие

полиномы первого порядка для получения приближенных значений в вершинах. Соответствующие полиномы:  $u = a_i + b_j x + c_k y$ . Где  $a_i, b_j$  и  $c_k$  - коэффициенты полинома.

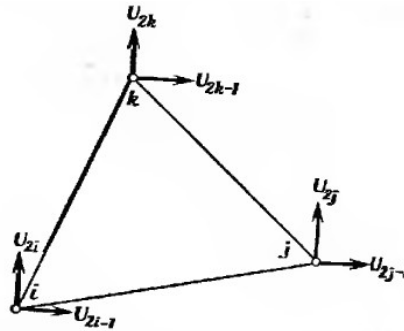


Рис 2. Компоненты перемещений плоского треугольного симплекс-элемента с  $i, j, k$  номерами узлов.

При рассмотрении векторной величины в треугольном симплекс-элементе первого порядка следует использовать следующие выражения для горизонтальной компоненты смещения и вертикальной:

$$u = N_i U_{2i-1} + 0U_{2i} + N_j U_{2j-1} + 0U_{2j} + N_k U_{2k-1} + 0U_{2k}$$

$$v = 0U_{2i-1} + N_i U_{2i} + 0U_{2j-1} + N_j U_{2j} + 0U_{2k-1} + N_k U_{2k}$$

или

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{pmatrix}$$

$$\{u\} = [N]\{U\}$$

где  $N_i, N_j, N_k$  определяются через координаты вершин элемента и коэффициентов полинома  $a_i, b_j, c_k$ .

Компоненты напряжений и деформаций для плоского случая запишутся соответственно:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\}; \{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}\}.$$

Соотношения между деформациями и перемещениями представляется в виде:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

Или в матричном виде для каждого элемента:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = 1/2A \begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{pmatrix}$$

В короткой форме:  $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$ , где  $\{U\}$ - вектор-столбец перемещений.

Матрица упругих характеристик [D] в случае плоской деформации и изотропных свойствах материала имеет вид:

$$[D] = E \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 1/(1 - \mu) & 0 \\ 1/(1 - \mu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\mu)/2(1 - \mu) \end{bmatrix}$$

Поскольку матрица [B] не содержит переменных, матрица жесткости, представляющая собой интеграл по объему от выражения  $[B]^T[D][B]$  получается равной  $[B]^T[D][B]At$ , где A- площадь элемента (треугольного), t- его толщина.

Вариационная задача в форме метода виртуальных перемещений представляет из себя следующее соотношение:

$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}]\{U\} + \{f^{(e)}\}$  – уравнение минимизации потенциальной энергии для элемента;

$[k^{(e)}] = \iiint [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV^{(e)}$  – матрица жесткости элемента;

$\{f^{(e)}\} = -(\iiint [N^{(e)}]^T \vec{p}_V^{(e)} dV^{(e)} + \iint [N^{(e)}]^T \vec{p}_S^{(e)} dS^{(e)} + \{P\})$  - вектор сил, где  $\vec{p}_V^{(e)}$  – объемные силы,  $\vec{p}_S^{(e)}$  - поверхностные силы и  $\{P\}$  - сосредоточенные силы, действующие на элемент.

Эти соотношения справедливы для каждого элемента. Однако, при составлении уравнений для нестационарных процессов, в данном случае переменного напряженного состояния (т.е. распространения упругих волн), вводятся дополнительные члены- матрица масс и демпфирования (необязательная): [M] и [C], соответственно. Матрица масс для элемента дается выражением:

$$[M] = \iiint [N^T] \rho [N] dV.$$

Матрица [C] ответственна за поглощение энергии волн, и будет рассмотрена далее. Окончательное матричное уравнение имеет вид:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

где {U} и {F}- векторы столбцы перемещений и сил соответственно.

Для решения этого уравнения применялась явная схема, аналогичная схеме Кранка-Николсона. При этом получим матричные уравнения следующего вида:

$$\frac{1}{\Delta t^2} [M]\{U^j\} - \frac{2}{\Delta t^2} [M]\{U^{j-1}\} + \frac{1}{\Delta t^2} [M]\{U^{j-2}\} + \frac{1}{2\Delta t} [C]\{U^j\} - \frac{1}{2\Delta t} [C]\{U^{j-2}\} + \frac{1}{2} [K]\{U^j\} + \frac{1}{2} [K]\{U^{j-2}\} = \frac{1}{2} \{F^j\} + \frac{1}{2} \{F^{j-2}\}$$

**Программы для решения задачи.** Для разбиения исследуемой области использовалась программа 'triangle' реализующая как обычное, так и качественное разбиение. В качестве элементов разбиения предлагается выбор: треугольные элементы либо те же треугольные элементы, но уже второго порядка.

Возможности программы предполагают простое или качественное разбиение. При качественном разбиении необходимо задавать дополнительный параметр - максимальную площадь треугольного элемента. Программа после грубого разбиения в этом случае итеративно преобразовывает сетку до наилучшего, с точки зрения условия, результата. Для просмотра предварительного результата достаточно использовать программу showme, которая идет в комплекте с программой 'triangle'.

Для сложных областей, программе необходимо подать файл, в котором присутствуют номера точек с координатами, последовательность их соединений и внутренние пустые области (пустоты, если присутствуют). На выходе программа создает 3 файла, два из которых подаются в программу моделирования сейсмических волн. Эти файлы содержат информацию о треугольниках, номерах их узлов, координатах узлов, координаты граничных точек. По умолчанию, обход каждого треугольника предполагается против часовой стрелки. После того, как область разбита на элементы, необходимо массив данных, содержащихся в выходных файлах программы triangle, подать на вход программы моделирования распространения сейсмических волн.

Программа моделирования сейсмических волн решает уравнение распространения упругих волн методом конечных элементов. Программа была написана на языке 'python' с использованием библиотек линейной алгебры и разреженных матриц, которые в свою очередь реализованы на языках фортран и Си, обеспечивая приемлемую скорость в вычислительных приложениях.

На вход программы должен быть подан файл с информацией о триангулированной области с координатами и номерами вершин.

Параметры среды для расчетов должны быть следующие: модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность, шаг по времени и количество шагов по времени.

На выходе программа выдает картинки для каждого отдельно взятого дискрета времени — двумерное волновое поле (со значениями амплитуд в точках) на исследуемой области, текстовые файлы со значениями амплитуды (для каждого дискрета времени) и сейсмограммы (в текстовом со значениями и графическом вариантах) в заранее выбранных точках.

**Параметры модели.** Модель для простоты обладает симметрией, как видно на рисунке 3. Размеры изучаемой области (в соответствующем масштабе), представленной на рисунке 3 следующие: 700 м в длину, 120 м в высоту плоской части до подъема. Общая высота возвышения от основания до вершины до 160 м, соответствующие размеры возвышения – 40 м в высоту и 140 м в ширину. Таким образом угол наклона возвышения примерно равен  $30^\circ$ , что значительно больше угла наклона, принятого в статье [1], равного  $11^\circ$ . Триангуляция данной модели производилась в программе triangle с флагом качества – q и с максимальной площадью треугольника равной  $5 \text{ м}^2$ . Примерное количество треугольников по ширине возвышения составляет порядка 40 треугольников и 20 по высоте возвышения. Всего же количество треугольников в модели достигает около 17 тыс. При таких параметрах модель для 250 временных шагов обчисляется в течение примерно 2-х часов на процессоре “Core i3-370M”.

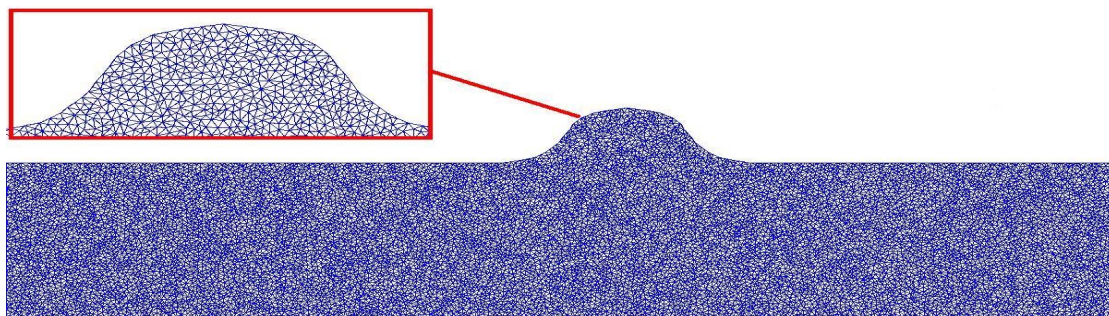


Рис. 3 Исследуемая область.

Плоская горизонтально-поляризованная волна моделируется множеством источников SH-волн, заданных у основания модели. Длина фронта падающей плоской волны 600 м – меньше горизонтальных размеров моделируемой области, с тем, чтобы по возможности уменьшить влияние боковых стенок области, длина волны  $\lambda = 20$  м. По 50 метров с обеих сторон отводится на слой с поглощением. Слой этот приклеен к боковым стенкам области моделирования и необходим для уменьшения влияния боковых стенок на волновое поле в модели. Отношение длины волны к высоте возвышения  $\lambda/h = 20/40 = 0,5$ . Такая длина волны позволяет более детально изучить эффекты, связанные с усилением амплитуды, во внутренней части возвышения, проследить ее развитие вблизи области возвышения, в какой-то мере разделить эффекты лучевого приближения и дифракционные на неровностях рельефа.

Заметим, что в работах [1, 2, 5] отношение длины волны к высоте неровности рельефа было значительно большим – от 3,5 до 9, что означает сравнительную малость (по сравнению с нашим случаем) исследованных неровностей рельефа.

**Входной импульс.** В данной работе в качестве входного использовался аналитический импульс Риккера, форма которого представлена на рис. 4. Математически, импульс описывается формулой:

$$(a^2 - 0.5) \exp(-a^2), \quad a = \pi(t - t_s)/t_p$$

$t_s$  – смещение во времени 0.040 с,  $t_p$  – период импульса 0.040 с.

Шаг дискретизации по времени 0.004 с.

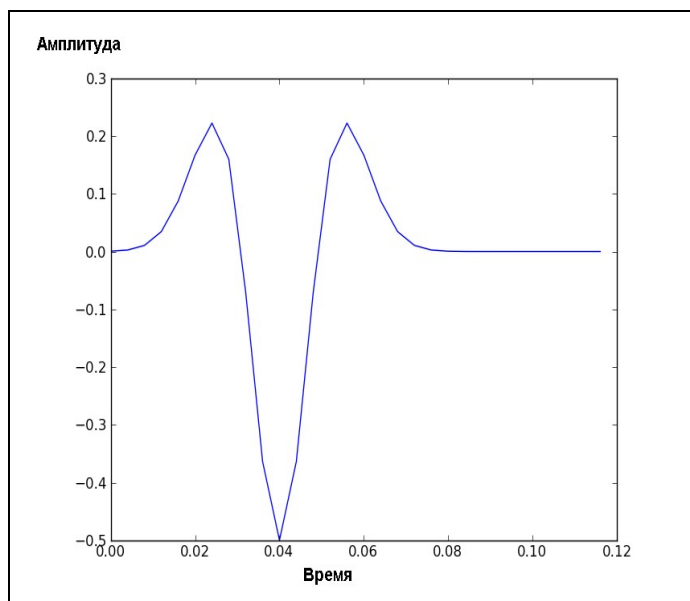


Рис. 4 Импульс Риккера.

**Об уменьшении влияния боковых стенок.** При построении модели было учтено поглощение на боковых стенках для значительного ослабления множественных отражений от них. Для этого к боковым областям приклеивалась область с матрицей демпфирования  $C$ , представленной в виде линейной комбинации матриц масс и жесткости  $\alpha M + \beta K$  (предполагается демпфирование по Релею) [6], где  $\alpha$  и  $\beta$  константы, которые рассчитываются в зависимости от 2-х значений частот входного импульса по формуле  $\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\omega_i\xi$ . Для того, чтобы не

составлять отдельные уравнения для разных областей - матрица  $C$  была посчитана для всей области, однако ненулевые значения матрицы – только для области поглощения.

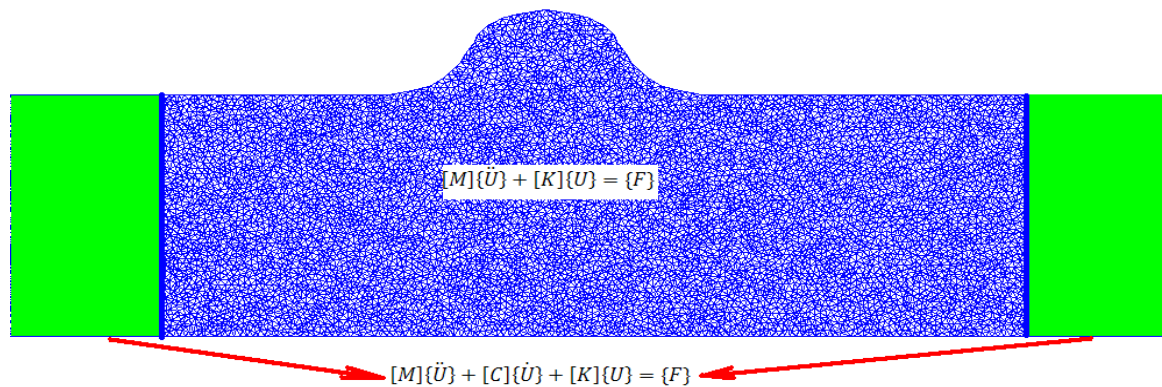


Рис. 5 Поглощение на стенках и его отсутствие внутри области.

Как следует из работы [7] для импульса Риккера с периодом 40 мс, частоты, соответствующие максимальной длительности и половине от нее – составляют соответственно 44 и 64 Гц. Параметр  $\xi$  – коэффициент Пуассона - для рыхлых отложений лежит в диапазоне 0.20-0.30. В данной работе этот параметр был выбран 0.30. Решая систему уравнений для каждой частоты и  $\xi$ , найдем  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\alpha = 98.296$  и  $\beta = 8.84 \cdot 10^{-4}$ .

#### **Результаты эксперимента.**

Процесс распространения упругой волны в модели представляется в виде последовательности кадров, каждый из которых показывает волновую картину со сдвигом по времени на 4,8 мсек, а по расстоянию на 1,2 м. Иллюстрацией этого являются рис. 6; 7 и 8 соответственно для моментов времени 144 мсек; 432 мсек и 648 мсек. На всех рисунках амплитуда упругой волны представлена в цветовой гамме – положительным значениям соответствует красный цвет, отрицательным – синий. В момент времени 0,48 с на сотом шагу упругая волна достигает противоположной плоской части модели, отражается от нижней поверхности модели и распространяется вверх. На неровностях рельефа возникают дифрагированные волны (отчетливо видные на рис. 8), которые складываясь с первичной волной, порождают изменение ее параметров – амплитуд, частот и фаз.

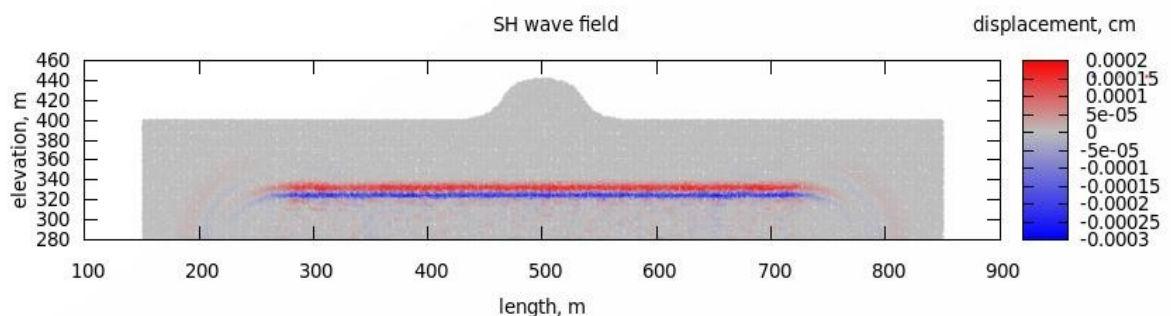




Рис.6 Волновая картина при  $\tau = 200$  мсек

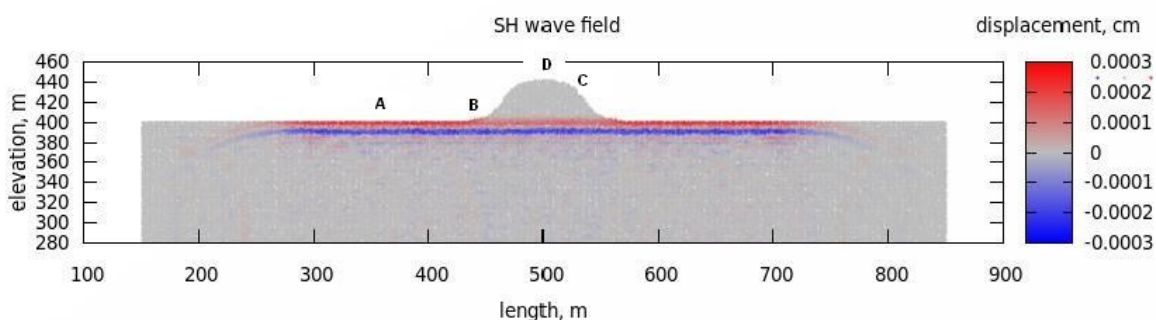


Рис.7 Волновая картина при  $\tau = 420$  мсек

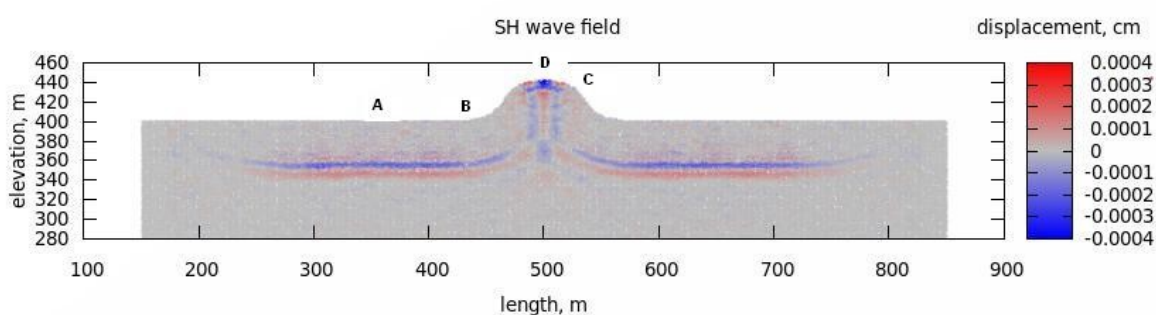


Рис.8 Волновая картина при  $\tau = 600$  мсек

Уже на приведенных рисунках 6 – 8 видно, что если и имеет место изменение амплитуд на неровностях рельефа, оно сравнительно невелико. Для более корректного заключения на рис. 9 – 12 приведены сейсмограммы, соответствующие различным точкам А, В, С, D на поверхности модели.

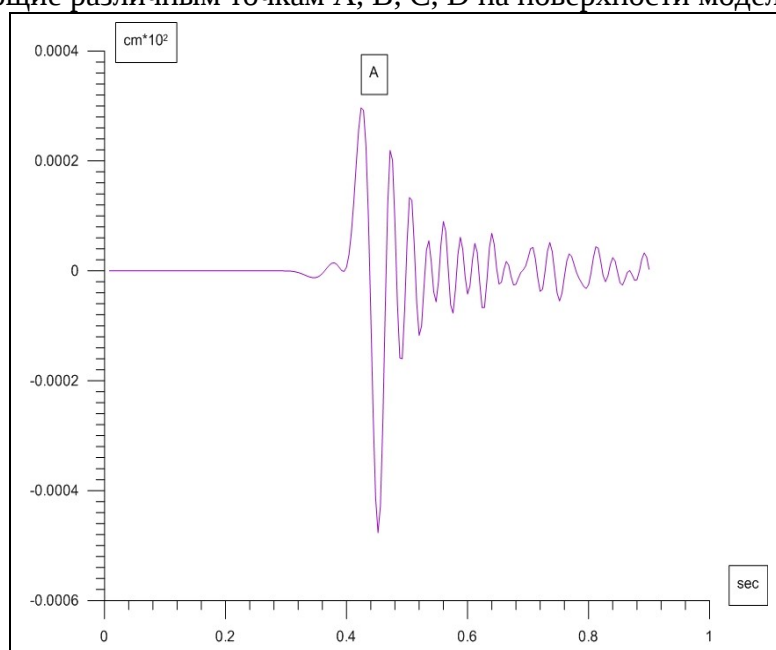


Рис.9 Сейсмограмма в точке А

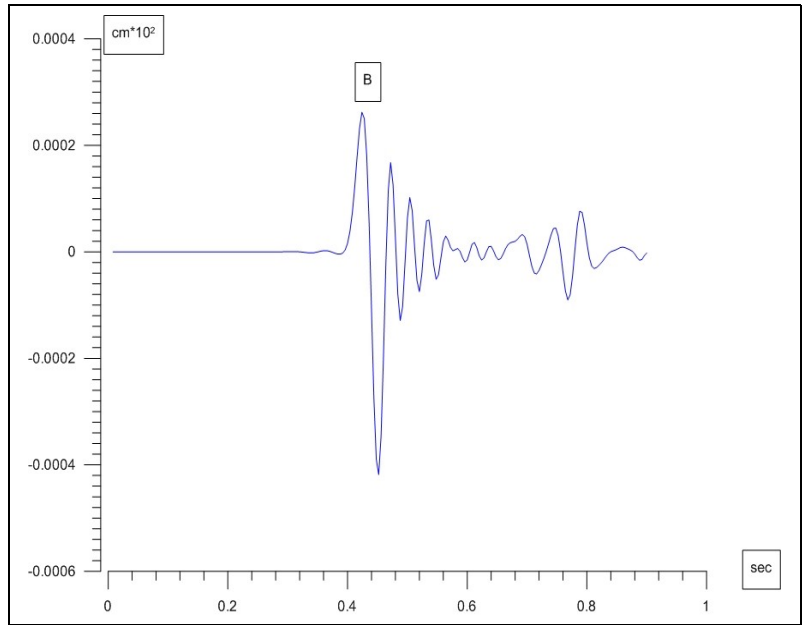


Рис.10 Сейсмограмма в точке В

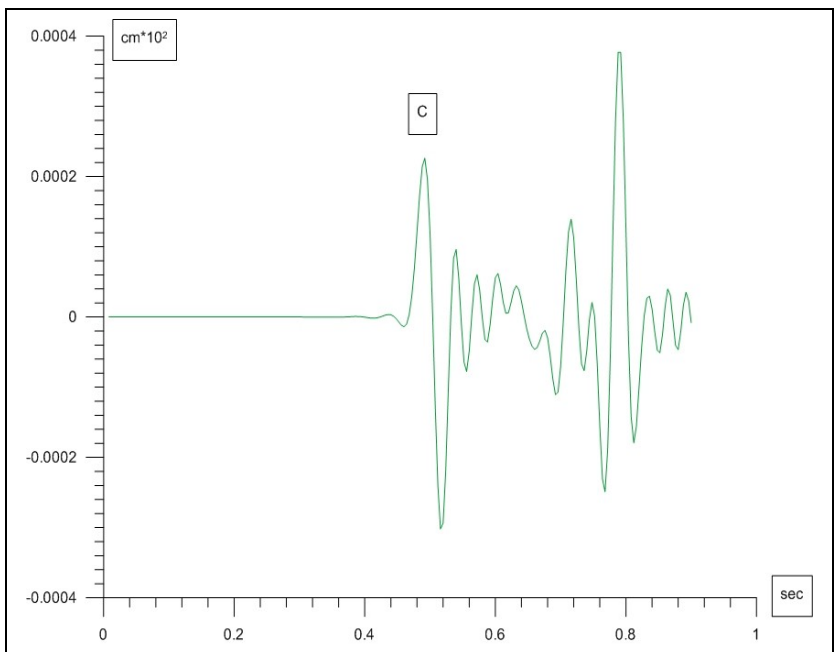


Рис. 11 Сейсмограмма в точке С

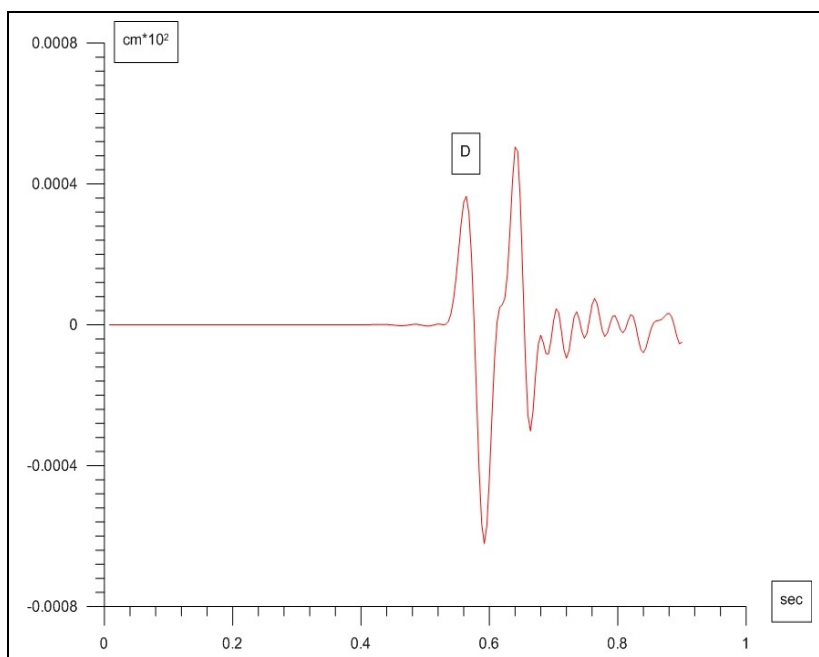


Рис. 12 Сейсмограмма в точке D

Максимальные амплитуды сейсмического импульса в точках А,В,С,Д соответственно равны  $7,7 \cdot 10^{-4}$ ;  $6,8 \cdot 10^{-4}$ ;  $6,4 \cdot 10^{-4}$ ;  $11,2 \cdot 10^{-4}$ . Таким образом, амплитуда упругой волны в пределах неоднородности рельефа по отношению к соответствующей амплитуде для плоского участка поверхности составляет от 0,83 до 1,45, т.е. изменение амплитуд не превышает 1,5. В переводе в баллы, принимая соотношение  $A_1/A_2 = 2^{\Delta I}$ , получим  $\Delta I = 0,6$  балла.

Этот результат получен при отношении длины волны к вертикальным размерам неоднородности рельефа  $\lambda/h = 0,5$ . Для других соотношений длины волны и высоты неоднородности амплитудные изменения будут другими.

### **Выводы.**

Разработана программа расчетов сейсмических волновых полей методом конечных элементов. С использованием этой программы исследовано влияние неоднородности рельефа на амплитуду упругой волны. Для соотношения длины волны к вертикальным размерам неоднородности  $\lambda/h = 0,5$  эти изменения не превышают 1,5, или при переводе в шкалу интенсивности не более 0,6 балла.

Дальнейшее исследование возможностей моделирования очевидно будет направлено на усложнение моделей, изучения эффекта в 3D, учет вязкости (если таковая имеется), учет трещиноватости и т. п.

### **Литература**

1. Пучков С.В. Значение рельефа местности при сейсмическом микрорайонировании. – Труды ИФЗ АН СССР, 1965, №36 (203).
2. Пучков С.В., Гарагозов Д. Исследование влияния холмистого рельефа местности на интенсивность сейсмических колебаний при землетрясениях.// Вопросы инж. сейсмол., вып.15, М., Наука, 1973.
3. Амасян Р.О., Микаелян Э.П. Модельные исследования влияния рельефа местности на распределение сейсмического волнового поля // Вопросы инж. сейсмол., вып.23, М., Наука, 1982, .с. 69-74.
4. Рекомендации по сейсмическому микрорайонированию РСМ-73. В кн.: Влияние грунтов на интенсивность сейсмических колебаний (Вопросы инж. сейсмологии, вып.15), М.: Наука, 1973, С.6-34.
5. Заалишвили В.Б., Мельков Д.А., Отинашвили М.Г. Использование метода конечных элементов при оценке сейсмической опасности горных территорий // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. №3, 2008.С.49-52.
6. Бате К, Вилсон Ч. Численные методы анализа и метод конечных элементов, /пер. с англ. - М.: Стройиздат, 1982, 448с.
7. G. S. Sarma, K. Mallick, and V. R. Gadhinglajkar. Nonreflecting boundary condition in finite-element formulation for an elastic wave equation // Geophysics; June 1998; v. 63; no. 3; p. 1006-1016