O1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СКАЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

А.В. Баев
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)

MATHEMATICAL MODELLING OF SCALAR WAVE FIELD NEARBY A CAUSTIC

A.V. Baev
(Lomonosov Moscow State University)

Аннотация. Известно, что лучевое приближение для расчета волновых полей вблизи каустики не применимо. Использование высокочастотных приближений не решает проблему в целом для произвольных источников возбуждения. Однако до настоящего времени полных динамических решений вблизи каустики не получено. Основным результатом работы является построение функции Грина краевой задачи для общего случая изменения скорости вблизи простой каустики. При этом установлено граничное условие на каустике. Предложено семейство разностных схем, приближающих решение дифференциальной задачи с неограниченным коэффициентом. Приведены результаты численного моделирования. Проведённые расчёты показали, что вблизи каустики действительно происходят фазовые изменения волны, однако в дальнейшем, при удалении от каустики, волна трансформируется в чисто отражённую.

Abstract. It is known that the ray approximation for calculating of wave fields near a caustic is not applicable. Using high-frequency approximation does not solve the problem as a whole for arbitrary excitation sources. However, to date, complete dynamic solutions near a caustic have not been received. The main result of the work is the construction of the Green's function for boundary problem for the general case of change of velocity near a caustic. Thus it was established the boundary value condition on the caustic. Also we propose a family of difference schemes approximating solution of differential problem with an unlimited coefficient. The results of numerical modeling are presented. Our calculations show that near the caustic phase changes of the wave do occur, but later, when a distance from the caustic, the wave is transformed into a pure reflected.

Постановка задачи. В работе рассматриваются вопросы, связанные с моделированием скалярных волновых полей в окрестности каустики. Поскольку в литературе встречаются различные по форме уравнения акустики, уточним, какой версии следует работа. В качестве исходных уравнений, описывающих малые колебания акустической среды, рассматриваются уравнения неразрывности, движения (следствие уравнения Эйлера) и состояния. Исключая скорость движения частиц среды и плотность, получаем для давления акустическое уравнение в недивергентной форме:

$$p_{tt}=a^2(\mathbf{x})\,\Delta\, \mathbf{p}(\mathbf{x},t), \qquad x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3, \quad t\in R\,. \qquad (1)$$

Пусть полупространство $x_3\geq 0$ является однородным, и $a(\mathbf{x})=1$ при $x_3\leq 0$. Пусть, далее, при $x_3>0$ скорость $a(\mathbf{x})=a(x_3)>1$, и $a(x_3)\in C[-\infty,\infty]$. Рассматривается задача рассеяния плоской волны, падающей наклонно под углом ν на плоскость $x_3=0$. Переменную x_3 по традиции будем называть глубиной.

Волновому уравнению (1) можно сопоставить математическую модель лучевого распространения. Множество точек поворота лучей образует в этом случае так называемую каустику. В окрестности каустики лучевой подход непосредственно не применим, и для построения решения волнового уравнения используют, как правило, отдельные рассмотрения, в основном базирующиеся на высокочастотных асимптотиках.

В настоящей работе исследована задача о рефракции плоской волны и предложены методы её решения, не использующие асимптотических приближений, а основанные на динамических рассмотрениях. На основе функций гипергеометрического типа построена линейно-независимая система решений начально-краевой задачи и получено интегральное уравнение типа Вольтерра относительно функции Грина. Для построения функции Грина существенно использован метод разложения по гладкости обобщенных решений с разрывами на характеристиках.

При численном моделировании использована разностная схема для гиперболических уравнений с коэффициентами, имеющими особенность. Исследованы свойства предложенной разностной схемы и вопросы приближения решений. Показано, что аппроксимирующие свойства схемы определяются порядком особенности коэффициента гиперболической системы уравнений. В частности, при линейном возрастании скорости с глубиной относительная погрешность составляет менее 0.1%.

Задача на каустике в бегущей системе координат. Перейдём к решению задачи. Будем искать его в виде бегущих вдоль поверхности $x_3=0$ волн, как нисходящих (падающих), так и восходящих (рефрагированных). Поскольку скорость перемещения волн вдоль поверхности $x_3=0$ постоянна, то можно перейти в локальную систему координат, перемещающуюся вместе с волной. Дальнейшее рассмотрение проводится в такой бегущей системе координат. При этом, очевидно, можно положить $x_2=0$. Уравнение (1) при $x_3>0$ в локальном времени *t* записывается как

$$p_{tt}=a^2(x_3)\left(1-a^2(x_3)\sin^2\nu\right)^{-1}p_{x_3x_3}. \qquad (2)$$

Для этого уравнения при $x_3>0$, $t>0$ можно поставить начально-краевую задачу. Волновое уравнение (2) характеризуется скоростью звука $b(x_3)=a(x_3)\left(1-a^2(x_3)\sin^2\nu\right)^{-1/2}$. Если функция $a(x_3)$ возрастает настолько, что подкоренное выражение обращается в нуль, то происходит поворот волны. Соответствующий угол однозначно определяет наибольшую глубину проникновения волны, при этом множество точек поворота является простой каустикой (в данном случае — плоскостью).

Совершим в исходной задаче переход к новым зависимым и независимым переменным. В качестве независимых переменных рассмотрим t и x — эйконал, равный времени распространения сигнала в среде со скоростью $b(x_3)$ от точки $x=0$ до текущей точки *x*. В качестве зависимых переменных введем римановы инварианты *v*(*x*,*t*) и *u*(*x*,*t*) гиперболической системы

$$v_t+v_x+z(x)u=0,\quad u_t-u_x-z(x)v=0. \qquad (3)$$

Связь функций *v*, *u* и *p* определяется равенствами

$$2v(x,t)=\left(p_t(x_3,t)/b(x_3)-p_{x_3}(x_3,t)b(x_3)\right),$$
$$2u(x,t)=\left(p_t(x_3,t)/b(x_3)+p_{x_3}(x_3,t)b(x_3)\right),$$

где $x_3=x_3(x)$. Коэффициент $z(x)$ в системе (3) имеет смысл коэффициента отражения в неоднородной среде.

На каустике функция $1-a(x_3)\sin\nu$ имеет в точке поворота нуль порядка *γ* (вообще говоря, не целого). Поскольку именно это обстоятельство играет определяющую роль в процессе рефракции, то рассмотрим частную задачу, положив $z(x)=q/(T-x)$, $2q=\gamma/(\gamma+1)$, где *T* является *x*-координатой (глубиной) точки поворота.

Из приведённого рассмотрения следует, что особенность коэффициента $z(x)$ всегда имеет первый порядок при указанном выше типе нуля выражения $1-a(x_3)\sin\nu$, и лишь множитель *q* зависит от порядка этого нуля. Поэтому основная цель работы — построение решения системы (3) для коэффициентов вида $z(x)=q/(T-x)+y(x)$, где $y(x)\in C[0,T]$. Заметим, что случаю линейного возрастания скорости $a(x_3)$ соответствует величина $q=1/6$.

Очевидно, что при $x=T$ рассмотрение системы (3) как гиперболической теряет смысл. Поэтому при $x=T$ должно быть поставлено дополнительное условие. Поскольку производные p_t, p_{x_3} по постановке задачи непрерывны, то выполняется граничное условие

$$v(T,t)+u(T,t)=0.$$

Решение задачи будем понимать как обобщённую функцию. Покажем, что, в случае мгновенного граничного источника $v(0,t)=\delta(t)$ (*δ —дельта-функция Дирака*) решение $w(x,t)=\left(v(x,t),\ u(x,t)\right)$ (вектор-функция Грина краевой задачи) имеет вид

$$w(x,t)=\left(\delta(t-x),\ \varkappa P_{1/2}(T-t+x)\right)+\tilde{w}(x,t),$$

где фигурная скобка является главной сингулярной частью решения (□ — обобщённая функция *главная часть интеграла*), $\varkappa=\sin \pi q/\pi$. Аддитивная составляющая решения wx,t — вектор-функция, менее сингулярная на характеристиках $t=x,\ t+x=2T$, чем главная часть.

Разностные схемы и численное моделирование. Основной проблемой при численном решении начально-краевой задачи для (3) является присутствие в системе неограниченного коэффициента. Однако на основе метода характеристик удается построить разностный метод решения и получить оценку погрешности.

В качестве конкретного класса используемых разностных схем (РС) выбраны схемы Годунова распада разрыва. Выбирая шаги по x и t равными (условие устойчивости выполнено не зависимо от того, явной или неявной является схема), получаем, что в силу однородности системы (3) по переменным x и t РС не зависит явно от шага сетки, а определяется только числом шагов по глубине *N*.

Рассмотрим вопрос об аппроксимации решения v исходной задачи разностным решением v. Введём оператор дискретизации $\cdot$, полагая, что он ставит в соответствие непрерывной функции f сеточную функцию f. Обозначим через ε погрешность разностного решения v, положив $\varepsilon=v\text{-}v$. При $q2<1$ получаем следующую оценку:

$$(1\text{-}q2)\varepsilon\le q2\ \psi\ v+v\text{-}v\ ,$$

где ψ — погрешность аппроксимации разностной схемы. Данная оценка является относительной. Входящая в неё величина ψ постоянна и может быть определена однократно. На основе непосредственного вычисления находим, что $\psi \le 0.01$. Кроме того, $v\text{-}v\le v/N$. Таким образом, при расчёте поля в окрестности каустики при линейном возрастании скорости при числе шагов по глубине $N=100$ допускается относительная погрешность ε/v не более чем 0.06%.

Перейдём к результатам численного моделирования. Известно, что в случае линейного возрастания скорости на каустике происходит изменение фазы волны на π/2. Иллюстрацией этого являются графики давления вблизи каустики. Предложенная РС позволяет находить решения типа "шепчущей галереи". Одно из таких решений представлено для коэффициента отражения при $x3=0$, равного 0.75. Рассмотрено несколько задач, имеющих практическую направленность, в частности, о распространении импульса Берлаге.

Проведённые расчёты показали, что вблизи каустики действительно происходят фазовые изменения волны, однако при удалении от каустики волна трансформируется в чисто отражённую. Результаты работы показывают также, что вне малой окрестности каустика действует как отражающая поверхность, и там применимо лучевое приближение. Эти закономерности следует учитывать при обработке геофизических данных.